Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 3, 301-325.

О двух-температурной задаче для уравнения Клейна-Гордона

Дудникова Т.В. [1], Комеч А.И. [2]

Аннотация

Рассматривается уравнение Клейна-Гордона с постоянными или переменными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Начальные данные — случайная функция с конечной средней плотностью энергии, удовлетворяющая условию перемешивания типа Розенблатта или Ибрагимова-Линника. Предполагается также, что начальная функция сходится к двум различным пространственно - инвариантным случайным процессам при $x_n \to \pm\infty$ с распределениями $\mu_\pm$. Изучается распределение μ_t случайного решения в момент времени $t \in \mathbb{R}$. Основной результат - доказательство сходимости μ_t к гауссовской трансляционно - инвариантной мере при $t \to \infty$, что означает центральную предельную теорему для уравнения Клейна - Гордона. Доказательство основано на методе "комнат-коридоров" С.Н. Бернштейна и оценках осциллирующих интегралов. Дается приложение к случаю гиббсовских мер $\mu_\pm = g_\pm$ с двумя различными температурами $T_\pm$. Показано, что предельная средняя плотность потока энергии для гиббсовских мер *формально* равна $-\infty \cdot (0, \ldots, 0, T_+ - T_-)$, а для сглаженного решения конечна и равняется $-C(0, \ldots, 0, T_+ - T_-)$ с константой $C > 0$. Это соответствует Второму началу термодинамики.

Ключевые слова и фразы: уравнение Клейна-Гордона, задача Коши, случайные начальные данные, условие перемешивания, преобразование Фурье, слабая сходимость мер, гауссовские меры, ковариационные функции и матрицы, характеристический функционал

[1]ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 125047 Москва, Россия. Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ (грант No 03-01-00189), ДФГ (грант No 436 RUS 113/615/0-1) и Австрийского Научного Фонда (FWF) (проект No P16105-N05).

[2]МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, 119992 Москва, ГСП-2, Россия. Работа выполнена при частичной поддержке Института Прикладной Математики им. Макса - Планка (Лейпциг) и Института им. В. Паули при Институте Математики Венского Университета.

1 Введение

Работа посвящена математическим проблемам обоснования статистической физики. Второй Закон термодинамики утверждает, что поток энергии направлен от высокой температуры к низкой и прямо пропорционален разности температур. Мы выводим этот закон для уравнения Клейна-Гордона в $\mathbb{R}^n$. Ключевую роль играет условие перемешивания типа Розеблатта или Ибрагимова-Линника для начальной меры. Условие перемешивания первоначально было введено Р.Л. Добрушиным и Ю.М. Суховым применительно к проблеме обоснования статистической физики для систем с бесконечным числом частиц, [6, 7]. Ранее сходимость к статистическому равновесию для двух-температурной начальной меры изучалось для а) одномерной цепочки гармонических осцилляторов, [2, 30], б) одномерной цепочки нелинейных осцилляторов, [17, 18, 22], в) многомерных гармонических кристаллов, [16]. Аналогичный результат для волнового уравнения в $\mathbb{R}^n$ с нечетным $n \geq 3$ доказан в [14]. Уравнение Клейна - Гордона имеет некоторые общие свойства с волновым уравнением. Оно формально получается из (1.1) при $m = 0$. С другой стороны, уравнение Клейна - Гордона и волновое имеют серьезные отличия, см. ниже. Для трансляционно-инвариантных начальных мер сходимость к статистическому равновесию была доказана для волнового уравнения в [13, 24], для уравнения Клейна-Гордона в [12, 25] и для гармонических кристаллов в [15].

Перейдем к описанию результатов. Формальные определения и утверждения даны в параграфе 2. Рассматривается уравнение Клейна-Гордона в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{u}(x,\,t) = \sum_{j=1}^{n}(\partial_j - iA_j(x))^2 u(x,t) - m^2\, u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad \dot{u}|_{t=0} = v_0(x). \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Здесь $\partial_j \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $m > 0$, $(A_1(x), \ldots, A_n(x))$ - потенциал магнитного поля. Предполагается, что функции $A_j(x)$ равны нулю вне некоторой ограниченной области. Решение $u(x,t)$ является комплекснозначной функцией.

Обозначим $Y(t) = (Y^0(t), Y^1(t)) \equiv (u(\cdot,t), \dot{u}(\cdot,t))$, $Y_0 = (Y_0^0, Y_0^1) \equiv (u_0(\cdot), v_0(\cdot))$. Тогда (1.1) принимает вид

$$\dot{Y}(t) = \mathcal{A}Y(t), \ \ t \in \mathbb{R}; \quad Y(0) = Y_0. \tag{1.2}$$

Через $\mathcal{A}$ обозначается операторнозначная матрица

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ A & 0 \end{array} \right), \tag{1.3}$$

где $A = \sum_{j=1}^{n}(\partial_j - iA_j(x))^2 - m^2$. Предполагается, что начальные данные Y_0 - случайный элемент функционального пространства $\mathcal{H}$ состояний с конечной локальной энергией, см. Определение 2.1 ниже. Распределение Y_0 обозначается через μ_0. Обозначим через $\mu_t(dY)$, $t \in \mathbb{R}$, меру на $\mathcal{H}$ - распределение случайного решения $Y(t)$ задачи (1.2).

Мы отождествляем $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ и обозначаем через $\otimes$ тензорное произведение вещественных векторов. Предполагается, что начальные корреляционные матрицы

$$Q_0^{ij}(x,y) := E\Big(Y_0^i(x) \otimes Y_0^j(y)\Big), \ \ x,y \in \mathbb{R}^n, \ \ i,j = 0,1, \tag{1.4}$$

имеют вид

$$Q_0^{ij}(x,y)=\begin{cases} q_+^{ij}(x-y), & x_n,y_n>a,\\ q_-^{ij}(x-y), & x_n,y_n<-a.\end{cases}\tag{1.5}$$

Здесь $q_\pm^{ij}(x-y)$ - корреляционные матрицы некоторых трансляционно-инвариантных мер $\mu_\pm$ с нулевым средним значением в $\mathcal{H}$, $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, $a>0$. Мера μ_0 не является трансляционно-инвариантной, если $q_-^{ij}\neq q_+^{ij}$.

Далее предполагается, что начальная средняя плотность энергии равномерно ограничена:

$$\begin{aligned} e_0(x) &:= E[|u_0(x)|^2+|\nabla u_0(x)|^2+|v_0(x)|^2]\\ &= \operatorname{tr}\Big(Q_0^{00}(x,x)+[\nabla_x\cdot\nabla_y Q_0^{00}(x,y)]|_{y=x}+Q_0^{11}(x,x)\Big)\le e_0<\infty,\quad \text{п.в. } x\in\mathbb{R}^n.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Наконец, предполагается, что начальная мера μ_0 удовлетворяет условию перемешивания типа Розенблатта или Ибрагимова-Линника, которое означает, грубо говоря, что

$$Y_0(x) \text{ и } Y_0(y) \text{ являются асимптотически независимыми при } |x-y|\to\infty.\tag{1.7}$$

Наш основной результат означает (слабую) сходимость мер

$$\mu_t \rightharpoondown \mu_\infty,\quad t\to\infty,\tag{1.8}$$

к равновесной мере μ_∞, которая является трансляционно-инвариантной гауссовской мерой на $\mathcal{H}$. Аналогичная сходимость имеет место при $t\to-\infty$, так как наша система обратима по времени. Мы строим общие примеры начальных мер μ_0, удовлетворяющих всем наложенным условиям. Получены явные формулы (2.13)-(2.15) для предельных корреляционных матриц.

Мы применяем наши результаты к случаю гиббсовских мер $\mu_\pm=g_\pm$. Формально,

$$g_\pm(du_0,dv_0)=\frac{1}{Z_\pm}e^{-\dfrac{\beta_\pm}{2}\displaystyle\int(|v_0(x)|^2+|\nabla u_0(x)|^2+m^2|u_0(x)|^2)dx}\prod_x du_0(x)dv_0(x),\tag{1.9}$$

где $\beta_\pm=T_\pm^{-1}$, $T_\pm\ge 0$ - соответствующие абсолютные температуры. Определение гиббсовских мер $g_\pm$ уточняется в параграфе 4. Гиббсовские меры $g_\pm$ имеют сингулярные корреляционные функции и не удовлетворяют нашему условию (1.6). Поэтому мы рассматриваем гауссовские процессы $u_\pm$, соответствующие мерам $g_\pm$, и определяем "сглаженные" меры $g_\pm^\theta$ как распределения сверток $u_\pm*\theta$, где $\theta\in D\equiv C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Меры $g_\pm^\theta$ удовлетворяют всем нашим предположениям, и сходимость $g_t^\theta\rightharpoondown g_\infty^\theta$ вытекает из (1.8). Отсюда следует слабая сходимость мер $g_t\rightharpoondown g_\infty$ в силу произвольности функции θ. Мы показываем, что предельный поток энергии для g_∞ равен, формально,

$$\bar{\mathbf{j}}_\infty=-\infty\cdot(0,\dots,0,T_+-T_-).$$

Эта бесконечность связана с "ультрафиолетовой расходимостью". Поток энергии имеет конечное значение в случае сглаженных мер g_∞^θ,

$$\bar{\mathbf{j}}_\infty^\theta=-C_\theta\cdot(0,\dots,0,T_+-T_-),$$

если функция $\theta(x)$ осесимметрична относительно Ox_n; $C_\theta > 0$, если $\theta(x) \not\equiv 0$. Это соответствует Второму Закону термодинамики.

Доказательство сходимости (1.8) мы проводим сначала для случая постоянных коэффициентов. Мы разбиваем доказательство на три этапа, используя общую стратегию [12]-[16].
I. Семейство мер μ_t, $t \geq 0$, является слабо компактным в подходящем пространстве Фреше.
II. Корреляционные матрицы сходятся к пределу: для $i, j = 0, 1$,

$$Q_t^{ij}(x, y) = \int \Big(Y^i(x) \otimes Y^j(y)\Big)\mu_t(dY) \to Q_\infty^{ij}(x, y), \quad t \to \infty. \tag{1.10}$$

III. Характеристические функционалы сходятся к гауссовскому:

$$\hat{\mu}_t(\Psi) := \int \exp(i\langle Y, \Psi\rangle)\mu_t(dY) \to \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathcal{Q}_\infty(\Psi, \Psi)\right\}, \quad t \to \infty, \tag{1.11}$$

где Ψ - произвольный элемент двойственного пространства, и $\mathcal{Q}_\infty$ - квадратичная форма с интегральным ядром $(Q_\infty^{ij}(x, y))_{i,j=0,1}$; через $\langle Y, \Psi\rangle$ обозначается скалярное произведение в действительном гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{R}^N$.

Свойство **I** следует из теоремы Прохорова о компактности с использованием методов М.И. Вишика и А.В. Фурсикова, разработанных ими для задач статистической гидромеханики в [5]. Сначала доказывается равномерная оценка для средней локальной энергии по мере μ_t. Мы выводим эту оценку из явного выражения для корреляционных матриц $Q_t^{ij}(x, y)$. Из нее следует выполнение условий теоремы Прохорова по теореме вложения Соболева. Свойство **II** мы выводим из анализа осциллирующих интегралов, возникающих в преобразовании Фурье. Важную роль при этом играет Предложение 5.1, выражающее свойства корреляционных функций в преобразовании Фурье, вытекающие из условия перемешивания.

Аналогичные свойства **I** и **II** были доказаны ранее в [16] для гармонического кристалла, который является дискретной моделью непрерывного уравнения Клейна-Гордона. Мы распространяем здесь эти свойства на непрерывный случай. Главную трудность по сравнению с [16] представляет некомпактность пространства Фурье $\mathbb{R}^n$ (для гармонического кристалла пространство Фурье - это тор T^n, который является компактным). Дело в том, что доказательства свойств **I** и **II** опираются на равномерные оценки сингулярных осциллирующих интегралов в смысле главного значения по Коши. Доказательство равномерности оценок для подобных интегралов в [16] существенно использует компактность множества параметров T^n, которая, в частности, обеспечивает равномерную невырожденность фазовых функций. В случае уравнения Клейна - Гордона соответствующая фазовая функция является невырожденной в любой ограниченной области пространства Фурье, однако она вырождена на бесконечности, что затрудняет получение равномерных оценок. В случае трансляционно-однородных мер подобные оценки для уравнения Клейна - Гордона были получены в работе [12], однако там соответствующие осциллирующие интегралы менее сингулярны, так как они не содержат главного значения по Коши. Поэтому в данной статье равномерные оценки осциллирующих интегралов потребовали новых средств: мы устраняем эту трудность с помощью Предложения 6.5, которое является необходимой для нашего случая модификацией предложения А.4 из [2, с.152]. Отметим, что это предложение является обобщением результатов М.В. Федорюка (см. Теоремы 1.8 и 1.10 в [32]). Однако непосредственно к нашей ситуации эти результаты не применимы из-за вырожденности фазовой функции на бесконечности.

Отметим, что мы выбираем начальные корреляционные матрицы в форме (2.9), которая соответствует начальной функции (2.22). Это позволяет избежать некоторых технических предположений на начальную корреляционную функцию (ср. [14, условие S2]).

Наконец, свойство **III** выводится в параграфе 8 с использованием варианта метода "комнат-коридоров" С.Н. Бернштейна из [12, 15].

В заключение, мы распространяем сходимость (1.8) на уравнения с переменными коэффициентами, которые являются постоянными вне конечной области. Это обобщение вытекает из нашего результата для постоянных коэффициентов с использованием теории рассеяния для решений с бесконечной энергией, которая построена в [12].

Статья построена следующим образом. В параграфе 2 сформулирован основной результат. Применение его к гиббсовским мерам дано в параграфе 4. В параграфах 3-8 рассматривается случай постоянных коэффициентов. Компактность (свойство **I**) и сходимость (1.10) доказаны в параграфах 5-7. В параграфе 8 доказывается сходимость (1.11) с помощью метода 'комнат-коридоров'. В параграфе 9 сходимость (1.8) доказывается для переменных коэффициентов. В Приложении А строится динамика в пространстве Фурье, в Приложении Б доказывается оценка сингулярных осциллирующих интегралов.

2 Основные результаты

2.1 Обозначения

Предполагается, что функции $A_j(x)$ в (1.1) удовлетворяют следующим условиям:

E1. $A_j(x)$ - действительные функции класса C^∞.
E2. $A_j(x) = 0$ при $|x| > R_0$, где $R_0 < \infty$.
E3. $\dfrac{\partial A_1}{\partial x_2} \not\equiv \dfrac{\partial A_2}{\partial x_1}$ при $n = 2$.

Мы предполагаем, что начальные данные Y_0 принадлежат комплексному фазовому пространству $\mathcal{H}$, определенному ниже.

Определение 2.1 $\mathcal{H} \equiv H^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n) \oplus H^0_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ *- пространство Фреше пар* $Y \equiv (u(x), v(x))$ *комплексных функций* $u(x)$, $v(x)$ *с локальными энергетическими полунормами*

$$\|Y\|_R^2 = \int\limits_{|x|<R} (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 + |v(x)|^2) dx < \infty, \quad \forall R > 0. \tag{2.1}$$

Предложение 2.2 следует из Теорем V.3.1, V.3.2 из [26] в силу конечности скорости распространения для уравнения (1.1).

Предложение 2.2 *i) Для любого* $Y_0 \in \mathcal{H}$ *существует единственное решение* $Y(t) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ *задачи Коши (1.2).*
ii) Для любого $t \in \mathbb{R}$ *оператор* $U(t) : Y_0 \mapsto Y(t)$ *непрерывен в* $\mathcal{H}$.

Выберем функцию $\xi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с $\xi(0) \neq 0$. Обозначим через $H^s_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, локальные пространства Соболева, то есть пространства Фреше распределений $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ с конечными полунормами

$$\|u\|_{s,R} := \|\Lambda^s\Big(\xi(x/R)u\Big)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Здесь $\Lambda^s u := F^{-1}_{k\to x}(\langle k\rangle^s \hat u(k))$, $\langle k\rangle := \sqrt{|k|^2+1}$, а $\hat u := Fu$, где F - преобразование Фурье. Для $\psi \in S \equiv S(\mathbb{R}^n)$ определим $F\psi(k) = \displaystyle\int \exp(ikx)\psi(x)dx$.

Определение 2.3 *Для* $s \in \mathbb{R}$ *обозначим* $\mathcal{H}^s \equiv H^{1+s}_{\rm loc}(\mathbb{R}^n) \oplus H^s_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$.

Используя стандартные методы псевдодифференциальных операторов и теорему Соболева (см., например, [20]), можно доказать, что $\mathcal{H}^0 = \mathcal{H} \subset \mathcal{H}^{-\varepsilon}$ для каждого $\varepsilon > 0$, и это вложение - компактно.

2.2 Случайное решение. Сходимость к равновесию

Пусть (Ω, Σ, P) - вероятностное пространство с оператором математического ожидания E, и $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ обозначает борелевскую σ-алгебру в $\mathcal{H}$. Мы предполагаем, что $Y_0 = Y_0(\omega, x)$ в (1.2) - измеримая случайная функция со значениями в $(\mathcal{H}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Другими словами, $(\omega, x) \mapsto Y_0(\omega, x)$ - измеримое отображение $\Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ относительно пополненных σ-алгебр $\Sigma \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Тогда $Y(t) = U(t)Y_0$ - измеримая случайная функция со значениями в $(\mathcal{H}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ в силу Предложения 2.2. Обозначим через $\mu_0(dY_0)$ борелевскую вероятностную меру в $\mathcal{H}$, которая является распределением Y_0. Без ограничения общности, мы полагаем, что $(\Omega, \Sigma, P) = (\mathcal{H}, \mathcal{B}(\mathcal{H}), \mu_0)$ и $Y_0(\omega, x) = \omega(x)$ для $\mu_0(d\omega) \times dx$-почти всех $(\omega, x) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}^n$.

Определение 2.4 μ_t *- борелевская вероятностная мера на* $\mathcal{H}$*, которая является распределением* $Y(t)$*:*

$$\mu_t(B) = \mu_0(U(-t)B), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \;\; t \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Наша основная цель - доказать слабую сходимость мер μ_t в пространствах Фреше $\mathcal{H}^{-\varepsilon}$ с любым $\varepsilon > 0$,

$$\mu_t \overset{\mathcal{H}^{-\varepsilon}}{\longrightarrow} \mu_\infty \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{2.3}$$

где μ_∞ - борелевская вероятностная мера на пространстве $\mathcal{H}$. По определению, это означает сходимость

$$\int f(Y)\mu_t(dY) \to \int f(Y)\mu_\infty(dY) \quad \text{при} \quad t \to \infty \tag{2.4}$$

для любого ограниченного непрерывного функционала $f(Y)$ на пространстве $\mathcal{H}^{-\varepsilon}$. Напомним, что мы отождествляем $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$, и $\otimes$ обозначает тензорное произведение действительных векторов. Обозначим $M^2 = \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$. Введем пространство пробных функций $\mathcal{S} = S \oplus S$ и обозначим $\langle Y, \Psi\rangle = \langle Y^0, \Psi^0\rangle + \langle Y^1, \Psi^1\rangle$, где $Y = (Y^0, Y^1) \in \mathcal{H}$, и $\Psi = (\Psi^0, \Psi^1) \in \mathcal{S}$.

Определение 2.5 *Определим корреляционные функции меры μ_t как M^2-значные обобщенные функции*

$$Q_t^{ij}(x,y) := E\Big(Y^i(x,t)\otimes Y^j(y,t)\Big), \quad i,j=0,1, \quad x,y\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n, \tag{2.5}$$

где E обозначает интеграл по мере $\mu_0(dY)$, а сходимость этого интеграла понимается в смысле обобщенных функций, т.е.

$$\langle Q_t^{ij}(x,y),\Psi(x,y)\rangle := E\langle Y^i(x,t)\otimes Y^j(y,t),\Psi(x,y)\rangle, \quad \Psi\in S(\mathbb{R}^{2n}). \tag{2.6}$$

Для борелевской вероятностной меры μ на пространстве $\mathcal{H}$ через $\hat\mu$ обозначается её характеристический функционал (преобразование Фурье)

$$\hat\mu(\Psi) \equiv \int \exp(i\langle Y,\Psi\rangle)\,\mu(dY), \quad \Psi\in\mathcal{S}.$$

Вероятностная мера μ называется гауссовской (с нулевым математическим ожиданием), если ее характеристический функционал имеет вид

$$\hat\mu(\Psi) = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathcal{Q}(\Psi,\Psi)\right), \quad \Psi\in\mathcal{S},$$

где $\mathcal{Q}$ - действительная неотрицательная квадратичная форма на $\mathcal{S}$. Мера μ называется трансляционно-инвариантной, если

$$\mu(T_hB)=\mu(B), \quad \forall B\in\mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad h\in\mathbb{R}^n,$$

где $T_hY(x)=Y(x-h)$, $x\in\mathbb{R}^n$.

2.3 Условие перемешивания

Через $O(r)$ обозначим множество всех пар открытых ограниченных подмножеств $\mathcal{A},\mathcal{B}\subset\mathbb{R}^n$ с расстоянием $\mathrm{dist}\,(\mathcal{A},\,\mathcal{B})\ge r$, и через $\sigma(\mathcal{A})$ - σ-алгебру в $\mathcal{H}$, порожденную линейными функционалами $Y\mapsto\langle Y,\Psi\rangle$, где $\Psi\in\mathcal{S}$ с $\mathrm{supp}\,\Psi\subset\mathcal{A}$. Определим коэффициент перемешивания Ибрагимова-Линника вероятностной меры μ_0 на $\mathcal{H}$ следующим образом (ср. с Определением 17.2.2 из [21, с.391])

$$\varphi(r) \equiv \sup_{(\mathcal{A},\mathcal{B})\in O(r)} \sup_{\substack{A\in\sigma(\mathcal{A}),\,B\in\sigma(\mathcal{B})\\ \mu_0(B)>0}} \frac{|\mu_0(A\cap B)-\mu_0(A)\mu_0(B)|}{\mu_0(B)}. \tag{2.7}$$

Определение 2.6 *Мера μ_0 удовлетворяет равномерно сильному условию перемешивания Ибрагимова-Линника, если*

$$\varphi(r)\to 0, \quad r\to\infty. \tag{2.8}$$

Ниже мы уточним скорость убывания φ (см. условие **S3**).

2.4 Статистические условия и основной результат

Мы предполагаем, что начальная мера μ_0 удовлетворяет следующим условиям **S0-S3**:

S0 μ_0 имеет нулевое математическое ожидание, т.е. $EY_0(x)=0\,,\ x\in\mathbb{R}^n\,.$
S1 μ_0 имеет корреляционные матрицы вида (ср. (1.5))

$$Q_0^{ij}(x,y)=q_-^{ij}(x-y)\zeta_-(x_n)\zeta_-(y_n)+q_+^{ij}(x-y)\zeta_+(x_n)\zeta_+(y_n). \qquad (2.9)$$

Здесь функции $\zeta_\pm\in C^\infty(\mathbb{R})$ такие, что

$$\zeta_\pm(s)=\begin{cases}1, & \text{при} \quad \pm\, s>a,\\ 0, & \text{при} \quad \pm\, s<-a.\end{cases} \qquad (2.10)$$

S2 μ_0 имеет ограниченную среднюю плотность энергии, т.е. выполнено условие (1.6).
S3 μ_0 удовлетворяет равномерно сильному условию перемешивания Ибрагимова - Линника, причем

$$\overline{\varphi}\equiv\int\limits_0^\infty r^{n-1}\varphi^{1/2}(r)dr<\infty. \qquad (2.11)$$

Определим корреляционную матрицу предельной меры μ_∞. Обозначим через $\mathcal{E}(z)$ фундаментальное решение оператора $-\Delta+m^2$, т.е. $(-\Delta+m^2)\mathcal{E}=\delta(x)$ при $x\in\mathbb{R}^n$, и $\mathcal{P}(x)=-iF^{-1}\left[\operatorname{sgn}k_n/\sqrt{|k|^2+m^2}\right]$, где F^{-1} - обратное преобразование Фурье. Определим матричнозначную функцию

$$Q_\infty(x,y)=\Big(Q_\infty^{ij}(x,y)\Big)_{i,j=0,1}=\Big(q_\infty^{ij}(x-y)\Big)_{i,j=0,1},\quad x,y\in\mathbb{R}^n, \qquad (2.12)$$

где

$$q_\infty^{00} \;=\; \frac12\Big[(\mathbf{q}^+)^{00}+\mathcal{E}*(\mathbf{q}^+)^{11}+\mathcal{P}*\Big((\mathbf{q}^-)^{01}-(\mathbf{q}^-)^{10}\Big)\Big], \qquad (2.13)$$

$$q_\infty^{10}=\;-\,q_\infty^{01} \;=\; \frac12\Big[(\mathbf{q}^+)^{10}-(\mathbf{q}^+)^{01}+\mathcal{P}*\Big((\mathbf{q}^-)^{11}+(-\Delta+m^2)(\mathbf{q}^-)^{00}\Big)\Big], \qquad (2.14)$$

$$q_\infty^{11}=(-\Delta+m^2)q_\infty^{00} \;=\; \frac12\Big[(\mathbf{q}^+)^{11}+(-\Delta+m^2)\Big((\mathbf{q}^+)^{00}+\mathcal{P}*\Big((\mathbf{q}^-)^{01}-(\mathbf{q}^-)^{10}\Big)\Big)\Big]. \qquad (2.15)$$

Здесь $\mathbf{q}^+:=\frac12(q_++q_-)$, $\mathbf{q}^-:=\frac12(q_+-q_-)$, а $*$ обозначает свертку обобщенных функций. Мы покажем ниже, что $D^\gamma q_\pm^{ij}\in L^2(\mathbb{R}^n)$, где $\gamma\in\mathbb{Z}^n$ с $|\gamma|\le 2-i-j$, $i,j=0,1$ (см. (5.4)). Поэтому свертки в (2.13)–(2.15) также принадлежат пространству $L^2(\mathbb{R}^n)$. Более того, из явных формул для $\mathcal{P}(x)$ и из (2.13)–(2.15) вытекает, что $q_\infty^{ij}\in L^2(\mathbb{R}^n)$, $i,j=0,1$. В преобразовании Фурье имеем

$$\hat q_\infty(k):=\hat q_\infty^+(k)+\hat q_\infty^-(k), \qquad (2.16)$$

где

$$\hat q_\infty^+(k) \;:=\; \frac12\Big(\hat{\mathbf{q}}^+(k)+\hat C(k)\hat{\mathbf{q}}^+(k)\hat C^T(k)\Big), \qquad (2.17)$$

$$\hat q_\infty^-(k) \;:=\; i\operatorname{sgn}(k_n)\frac12\Big(\hat C(k)\hat{\mathbf{q}}^-(k)-\hat{\mathbf{q}}^-(k)\hat C^T(k)\Big) \qquad (2.18)$$

с матрицей $\hat{C}(k)$, определенной в (10.3).

Пусть $H = L^2(\mathbb{R}^n) \oplus H^1(\mathbb{R}^n)$ обозначает пространство комплекснозначных функций $\Psi = (\Psi^0, \Psi^1)$ с конечной нормой

$$\|\Psi\|_H^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (|\Psi^0(x)|^2 + |\nabla\Psi^1(x)|^2 + |\Psi^1(x)|^2)\, dx < \infty. \tag{2.19}$$

Обозначим через $\mathcal{Q}_\infty(\Psi, \Psi)$ действительную квадратичную форму на H, определенную следующим образом

$$\mathcal{Q}_\infty(\Psi, \Psi) = \sum_{i,j=0,1} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \Big(Q_\infty^{ij}(x,y), \Psi^i(x) \otimes \Psi^j(y)\Big)\, dxdy, \tag{2.20}$$

где $Q_\infty^{ij}(x,y)$ определены в (2.12)-(2.15), $\Big(\cdot,\cdot\Big)$ обозначает действительное скалярное произведение в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^4$. Форма $\mathcal{Q}_\infty$ непрерывна на H в силу Следствия 5.3.

Обозначим $D := C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{D} = D \oplus D$.

Теорема A *Пусть* $n \geq 2$, $m > 0$ *и условия* **E1-E3**, **S0-S3** *выполнены. Тогда*
i) сходимость (2.3) имеет место для любого $\varepsilon > 0$;
ii) предельная мера μ_∞ *- гауссовская равновесная мера на* $\mathcal{H}$;
iii) предельный характеристический функционал имеет вид

$$\hat{\mu}_\infty(\Psi) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathcal{Q}_\infty(W\Psi, W\Psi)\right\}, \quad \Psi \in \mathcal{D}.$$

Здесь $W : \mathcal{D} \to H$ *линейный непрерывный оператор, и* $W = I$, *если* $A_j(x) \equiv 0$.

2.5 Примеры

2.5.1 Гауссовские меры

Построим гауссовские начальные меры μ_0, удовлетворяющие условиям **S0**–**S3**. Возьмем некоторые гауссовские меры $\mu_\pm$ на $\mathcal{H}$ с корреляционными функциями $q_\pm^{ij}(x-y)$, которые равны нулю при $i \neq j$, а $q_\pm^{ii} \in C^2(\mathbb{R}^n) \otimes M^2$ и имеют компактный носитель:

$$q_\pm^{ii}(x) = 0, \;\; |x| \geq r_0. \tag{2.21}$$

Например, возьмем $q_\pm^{ii}(x) = F_{k\to x}^{-1}[f(k_1)f(k_2)\cdot\ldots\cdot f(k_n)]$, где

$$f(z) = \left(\frac{1 - \cos(r_0 z/\sqrt{n})}{z^2}\right)^2, \;\; z \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что в силу теоремы Минлоса (см. [8, глава V]) борелевские вероятностные меры $\mu_\pm$ существуют на пространствах $\mathcal{H}$, так как *формально* мы имеем

$$\int \|Y\|_R^2\, \mu_\pm(dY) = |B_R|\, \mathrm{tr}(q_\pm^{00}(0) - \Delta q_\pm^{00}(0) + q_\pm^{11}(0)) < \infty, \quad R > 0.$$

Более того, меры $\mu_\pm$ удовлетворяют условиям **S0-S2** и условию перемешивания (2.8), так как $\varphi(r) = 0$ при $r \geq r_0$ ввиду (2.21). Поэтому условие **S3** также выполнено.

Введем (Y_-, Y_+) как единичную случайную функцию на вероятностном пространстве $(\mathcal{H}\times\mathcal{H}, \mu_-\times\mu_+)$. Тогда $Y_\pm\in\mathcal{H}$ - гауссовские независимые векторы с нулевым средним значением. Определим μ_0 как распределение случайной функции

$$Y_0(x) = \zeta_-(x_n)Y_-(x) + \zeta_+(x_n)Y_+(x), \tag{2.22}$$

где функции $\zeta_\pm$ введены в (2.10). Тогда корреляционные матрицы меры μ_0 имеют вид (2.9). Следовательно, условия **S0-S2** и **S3** для μ_0 выполняются с теми же функциями $\varphi(r)$, что и для $\mu_\pm$.

2.5.2 Негауссовские меры

Выберем некоторые нечетные непостоянные функции $f^0,\ f^1\in C^2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ с ограниченными производными. Определим μ_0^* как распределение случайной функции $(f^0(Y_0(x)), f^1(Y_0(x)))$, где $Y_0(x)$ - случайная функция (2.22) с гауссовским распределением μ_0. Тогда условия **S0–S2** и **S3** выполнены для μ_0^*, так как соответствующие коэффициенты перемешивания $\varphi^*(r)=0$ при $r\ge r_0$. Мера μ_0^* не является гауссовской, так как функции f^0, f^1 ограничены и непостоянны.

3 Уравнения с постоянными коэффициентами

В параграфах 3-8 мы полагаем, что коэффициенты $A_j(x)\equiv 0$. Тогда, задача (1.1) имеет постоянные коэффициенты:

$$\left\{\begin{array}{l} \ddot u(x,t) = \Delta u(x,t) - m^2 u(x,t), \quad t\in\mathbb{R},\\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad \dot u|_{t=0} = v_0(x). \end{array}\right. \tag{3.1}$$

Как в (1.2), перепишем (3.1) в виде

$$\dot Y(t) = \mathcal{A}_0 Y(t),\ \ t\in\mathbb{R};\quad Y(0)=Y_0. \tag{3.2}$$

Здесь

$$\mathcal{A}_0 = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1\\ A_0 & 0\end{array}\right), \tag{3.3}$$

где $A_0=\Delta-m^2$. Обозначим через $U_0(t)$, $t\in\mathbb{R}$, динамическую группу задачи (3.2), тогда $Y(t)=U_0(t)Y_0$. Следующее предложение хорошо известно и доказывается интегрированием по частям.

Предложение 3.1 *Пусть* $Y_0=(u_0,v_0)\in\mathcal{H}$, *и* $Y(\cdot,t)=(u(\cdot,t),\dot u(\cdot,t))\in C(\mathbb{R},\mathcal{H})$ *- решение задачи (3.2). Тогда справедлива следующая энергетическая оценка: для* $R>0$ *и* $t\in\mathbb{R}$,

$$\int\limits_{|x|<R}\Big(|\dot u(x,t)|^2+|\nabla u(x,t)|^2+m^2|u(x,t)|^2\Big)dx \le \int\limits_{|x|<R+|t|}\Big(|v_0(x)|^2+|\nabla u_0(x)|^2+m^2|u_0(x)|^2\Big)dx. \tag{3.4}$$

Положим $\mu_t(B) = \mu_0(U_0(-t)B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $t \in \mathbb{R}$. Сформулируем основной результат для задачи (3.2).

Теорема Б *Пусть $n \geq 1$, $m > 0$, и выполнены условия* **S0–S3**. *Тогда справедливы утверждения Теоремы А с $W = I$, и предельная мера μ_∞ трансляционно-инвариантна.*

Эта теорема вытекает из следующих Предложений 3.2 и 3.3 с использованием методов [5].

Предложение 3.2 *Семейство мер $\{\mu_t, t \in \mathbb{R}\}$ слабо компактно на $\mathcal{H}^{-\varepsilon}$ с любым $\varepsilon > 0$, и справедливы оценки $\sup\limits_{t\geq 0} E\|U_0(t)Y_0\|_R^2 < \infty$, $R > 0$.*

Предложение 3.3 *Для любого $\Psi \in \mathcal{D}$,*

$$\hat{\mu}_t(\Psi) \equiv \int \exp(i\langle Y, \Psi\rangle)\mu_t(dY) \to \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathcal{Q}_\infty(\Psi, \Psi)\right\}, \ \ t \to \infty. \qquad (3.5)$$

Предложения 3.2 и 3.3 доказаны в параграфах 7 и 8, соответственно. Доказательства существенно используют явные формулы (10.2)–(10.6) из Приложения А.

4 Приложение к случаю гиббсовских мер

Применим Теорему Б к случаю, когда $\mu_\pm = g_\pm$ - гиббсовские меры (1.9), соответствующие различным положительным температурам $T_- \neq T_+$.

4.1 Гиббсовские меры

Определим гиббсовские меры $g_\pm$ как гауссовские меры с корреляционными функциями (ср. (1.9))

$$q_\pm^{00}(x-y) = T_\pm \mathcal{E}(x-y), \ \ q_\pm^{11}(x-y) = T_\pm \delta(x-y), \ \ q_\pm^{01}(x-y) = q_\pm^{10}(x-y) = 0, \qquad (4.1)$$

где $x, y \in \mathbb{R}^n$. Корреляционные функции $q_\pm^{ij}$ не удовлетворяют условию **S2** из-за сингулярности при $x = y$. Эта сингулярность означает, что меры $g_\pm$ не сосредоточены на пространстве $\mathcal{H}$. Введем соответствующие функциональные пространства для мер $g_\pm$. Сначала определим весовые пространства Соболева с любыми $s, \alpha \in \mathbb{R}$.

Определение 4.1 $H_{s,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *- гильбертово пространство распределений $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ с конечной нормой*

$$\|u\|_{s,\alpha} \equiv \|\langle x\rangle^\alpha \Lambda^s u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} < \infty, \ \ \Lambda^s u \equiv F^{-1}\Big[\langle k\rangle^s \hat{u}(k)\Big]. \qquad (4.2)$$

Зафиксируем произвольные $s, \alpha < -n/2$.

Определение 4.2 $G_{s,\alpha}$ *- гильбертово пространство $H_{s+1,\alpha}(\mathbb{R}^n) \oplus H_{s,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ с нормой*

$$|||Y|||_{s,\alpha} \equiv \|u\|_{s+1,\alpha} + \|v\|_{s,\alpha} < \infty, \ \ Y = (u, v).$$

Введем гауссовские борелевские вероятностные меры $g^0_\pm(du)$, $g^1_\pm(dv)$ на пространствах $H_{s+1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ и $H_{s,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, соответственно, с характеристическими функционалами

$$\left.\begin{array}{rcl}\hat g^0_\pm(\psi) &=& \displaystyle\int \exp\{i\langle u,\psi\rangle\} g^0_\pm(du) = \exp\left\{-\frac{\langle(-\Delta+m^2)^{-1}\psi,\psi\rangle}{2\beta_\pm}\right\}\\ \hat g^1_\pm(\psi) &=& \displaystyle\int \exp\{i\langle v,\psi\rangle\} g^1_\pm(dv) = \exp\left\{-\frac{\langle\psi,\psi\rangle}{2\beta_\pm}\right\}\end{array}\right|\quad \psi\in D.$$

По теореме Минлоса борелевские вероятностные меры $g^0_\pm$, $g^1_\pm$ существуют на пространствах $H_{s+1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $H_{s,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, соответственно, потому что *формально* (см. Приложение Б в [12, с.31])

$$\int \|u\|^2_{s+1,\alpha} g^0_\pm(du) < \infty, \quad \int \|v\|^2_{s,\alpha} g^1_\pm(dv) < \infty, \quad s,\alpha < -n/2. \tag{4.3}$$

Наконец, определим гиббсовские меры $g_\pm(dY)$ как борелевские вероятностные меры $g^0_\pm(du)\times g^1_\pm(dv)$ на $G_{s,\alpha}$. Пусть $g_0(dY)$ - борелевская вероятностная мера на $G_{s,\alpha}$, которая построена так же, как в параграфе 2.5.1 с $\mu_\pm(dY)=g_\pm(dY)$. Она удовлетворяет условиям **S0** и **S1** с $q^{ij}_\pm$ из (4.1). Однако, g_0 не удовлетворяет условию **S2**. Поэтому, Теорема Б не может быть применена непосредственно к $\mu_0 = g_0$. Вложение $G_{s,\alpha}\subset\mathcal{H}^s$ непрерывно, что можно доказать методами псевдодифференциальных операторов, [20]. Следующую лемму легко доказать с помощью преобразования Фурье, используя конечность скорости распространения для уравнения Клейна - Гордона.

Лемма 4.3 *Операторы $U_0(t): Y_0 \mapsto Y(t)$ допускают непрерывное расширение $\mathcal{H}^s\mapsto\mathcal{H}^s$.*

Пусть Y_0 - случайная функция с распределением g_0, следовательно, $Y_0\in G_{s,\alpha}$ п.н. Обозначим через g_t распределение функции $U_0(t)Y_0$.

Замечание 4.4 *Пусть s - достаточно большое отрицательное число. Тогда существует гауссовская борелевская вероятностная мера g_∞ на $\mathcal{H}^s$ такая, что*

$$g_t \xrightarrow{\mathcal{H}^s} g_\infty, \quad t\to\infty. \tag{4.4}$$

Это можно доказать аналогично Теореме А. Предельная мера g_∞ - гауссовская с корреляционной матрицей $Q_\infty = (Q^{ij}_\infty(x,y))_{i,j=0,1}$, где

$$Q^{00}_\infty(x,y) \equiv q^{00}_\infty(x-y) = \frac{1}{2}(T_+ + T_-)\mathcal{E}(x-y), \tag{4.5}$$

$$Q^{10}_\infty(x,y) = -Q^{01}_\infty(x,y) \equiv q^{10}_\infty(x-y) = \frac{1}{2}(T_+ - T_-)\mathcal{P}(x-y), \tag{4.6}$$

$$Q^{11}_\infty(x,y) \equiv q^{11}_\infty(x-y) = \frac{1}{2}(T_+ + T_-)\delta(x-y). \tag{4.7}$$

Тождества (4.5)–(4.7) формально получаются из (4.1) и (2.13)–(2.15). Мы будем их рассматривать как определение функций $Q^{ij}_\infty(x,y)$.

4.2 Предельный поток энергии для сглаженных полей

Пусть $u(x,t)$ - случайное решение задачи (3.1) с начальной мерой μ_0, удовлетворяющей условиям **S0–S3**. Средняя плотность потока энергии равна $E\mathbf{j}(x,t) = -E\dot{u}(x,t)\nabla u(x,t)$. Поэтому в пределе $t \to \infty$,

$$E\mathbf{j}(x,t) \to \bar{\mathbf{j}}_\infty = \nabla q_\infty^{10}(0),$$

ввиду (6.7). В случае "гиббсовской" начальной меры g_0 из выражения (4.6) для предельной корреляционной функции следует *формально*, что

$$\bar{\mathbf{j}}_\infty = \frac{T_+ - T_-}{2}\nabla\mathcal{P}(0),$$

где $[\nabla\mathcal{P}](z) = -F^{-1}\Big[k\,\mathrm{sgn}\,k_n/\sqrt{|k|^2+m^2}\Big](z)$. Следовательно, формально мы имеем "ультрафиолетовую расходимость" предельной средней плотности потока энергии:

$$\bar{\mathbf{j}}_\infty = -\frac{T_+ - T_-}{2(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{k\,\mathrm{sgn}\,k_n}{\sqrt{|k|^2+m^2}}dk = -\infty\cdot(0,\ldots,0,T_+ - T_-).$$

Это связано с тем, что гиббсовские меры $g_\pm$ имеют сингулярные корреляционные функции и не удовлетворяют условиям (1.6). Соответственно, наши результаты непосредственно к $g_\pm$ не применимы. Рассмотрим гауссовские процессы $u_\pm$, соответствующие мерам $g_\pm$ и определим "сглаженные" меры $g_\pm^\theta$ как распределения сверток $u_\pm * \theta$, где $\theta \in D \equiv C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Меры $g_\pm^\theta$ удовлетворяют всем нашим условиям, и поэтому сходимость $g_t^\theta \rightharpoonup g_\infty^\theta$ вытекает из Теоремы Б. Для свертки $U_0(t)(Y_0 * \theta)$ соответствующая предельная плотность потока энергии конечна и равна

$$\bar{\mathbf{j}}_\infty^\theta = -\frac{T_+ - T_-}{2(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\hat{\theta}(k)|^2\frac{k\,\mathrm{sgn}\,k_n}{\sqrt{|k|^2+m^2}}dk = -C_\theta\cdot(0,\ldots,0,T_+ - T_-),$$

если $\theta(x)$ - осесимметрична относительно оси Ox_n, и $C_\theta > 0$ если $\theta(x) \not\equiv 0$.

5 Оценки для начальной ковариации

5.1 Перемешивание в терминах спектральной плотности

Следующее предложение выражает условие перемешивания в терминах преобразования Фурье $\hat{q}_\pm^{ij}$ начальных корреляционных функций $q_\pm^{ij}$. Из условия **S2** следует, что $q_\pm^{ij}(z)$ - непрерывные ограниченные функции. Поэтому $Q_0^{ij}(x,y)$ в (2.9) также являются непрерывными ограниченными функциями.

Предложение 5.1 *Пусть выполнены условия Теоремы Б. Тогда*
i) при $i,j = 0,1$ *имеют место следующие оценки*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}|Q_0^{ij}(x,y)|\,dy \le C < \infty, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |Q_0^{ij}(x,y)|\,dx \le C < \infty, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

где константа C *не зависит от* $x, y \in \mathbb{R}^n$.
ii) $\hat{q}_{\pm}^{ij} \in L^1(\mathbb{R}^n) \otimes M^2$, $i, j = 0, 1$.

Доказательство. *i)* Из условий **S0**, **S2** и **S3** по Теореме 17.2.3 из [21, с.392] вытекает, что при $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$, $|\alpha| \le 1 - i$ и $|\beta| \le 1 - j$ с $i, j = 0, 1$ справедливы следующие оценки:

$$|D_{x,y}^{\alpha,\beta} Q_0^{ij}(x,y)| \le C e_0 \varphi^{1/2}(|x-y|), \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{5.1}$$

Коэффициент перемешивания φ ограничен, поэтому из (5.1) и (2.11) следует:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |D_{x,y}^{\alpha,\beta} Q_0^{ij}(x,y)|^p\,dy \le C e_0^p \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^{p/2}(|x-y|)\,dy \le C_1 e_0^p \int\limits_0^\infty r^{n-1} \varphi^{1/2}(r) dr < \infty, \quad p \ge 1. \tag{5.2}$$

ii) Аналогично (5.1), для $\gamma \in \mathbb{Z}^n$ с $|\gamma| \le 2 - i - j$, $i, j = 0, 1,$ имеем

$$|D_z^\gamma q_{\pm}^{ij}(z)| \le C e_0 \varphi^{1/2}(|z|), \quad z \in \mathbb{R}^n. \tag{5.3}$$

Поэтому, в силу (2.11) получаем, что для $p \ge 1$, (ср. (5.2))

$$D^\gamma q_{\pm}^{ij}(z) \quad \in \quad L^p(\mathbb{R}^n) \otimes M^2. \tag{5.4}$$

Но по теореме Бохнера распределение $\hat{q}_{\pm} \equiv (\hat{q}_{\pm}^{ij}(k))dk$ является положительно-определенной матричнозначной мерой на $\mathbb{R}^n$, причем из **S2** вытекает, что полная мера $\hat{q}_{\pm}(\mathbb{R}^n)$ конечна. Наконец, из (5.4) при $p = 2$ следует, что $\hat{q}_{\pm}^{ij} \in L^2(\mathbb{R}^n) \otimes M^2$. ■

Следствие 5.2 *i) Из пункта i) Предложения 5.1 по лемме Шура следует, что квадратичная форма* $\mathcal{Q}_0(\Psi, \Psi) = \langle Q_0(x,y), \Psi(x) \otimes \Psi(y) \rangle$ *непрерывна на* $L^2(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{C}^2$.
ii) Аналогично Предложению 5.1 ii), из оценки (5.4) и теоремы Бохнера следует, что $\omega^{2-i-j}(k) \hat{q}_{\pm}^{ij}(k) \in L^1(\mathbb{R}^n) \otimes M^2$, $i, j = 0, 1.$ *Следовательно, для матрицы* $\hat{C}(k)$ *, определенной в (10.3), имеем*

$$\hat{C}(k) \hat{q}_{\pm}(k) \hat{C}^T(k), \quad \hat{C}(k) \hat{q}_{\pm}(k), \quad \hat{q}_{\pm}(k) \hat{C}^T(k) \in L^1(\mathbb{R}^n) \otimes M^4. \tag{5.5}$$

Поэтому, из (2.16)-(2.18) вытекает, что $\hat{q}_{\infty}^{ij} \in L^1(\mathbb{R}^n) \otimes M^2$, $\forall i, j$.

Следствие 5.3 *Квадратичная форма* $\mathcal{Q}_{\infty}(\Psi, \Psi)$ *непрерывна на* $L^2(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{C}^2$.

Доказательство. Это вытекает из явных формул (2.12)-(2.15). Действительно, во-первых, $\mathcal{E}(z) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Во-вторых, для любого $\psi \in L^2$ имеем

$$\langle (\mathcal{P} * q_{\pm}^{ij})(x-y), \psi(x) \otimes \psi(y) \rangle = \langle q_{\pm}^{ij}(x-y), (\check{\mathcal{P}} * \psi)(x) \otimes \psi(y) \rangle,$$

где $\check{\mathcal{P}}(x) := \mathcal{P}(-x)$. Отметим, что $\|\mathcal{P} * \psi\|_{L^2} \le C \|\psi\|_{L^2}$. Следовательно, непрерывность $Q_{\infty}(\Psi, \Psi)$ вытекает из леммы Шура в силу (5.4) с $p = 1$. ■

5.2 Разложение начальной коварииации

Лемма 5.4 *Преобразования Фурье функций* $\zeta_\pm \in C^\infty(\mathbb{R})$ *допускают следующие представления:*

$$\hat\zeta_\pm(k) = \pi\delta(k) \pm i\,\mathrm{PV}\Big(\frac{1}{k}\Big)\hat\alpha_\pm(k), \tag{5.6}$$

где $\alpha_\pm \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Доказательство. Обозначим $\alpha_\pm(x) := \pm\zeta'_\pm(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда $\zeta_+(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \alpha_+(y)\,dy$, $\zeta_-(x) = \int\limits_{x}^{+\infty} \alpha_-(y)\,dy$. В силу (2.10) функции $\alpha_\pm$ обладают следующими свойствами: i) $\alpha_\pm \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, ii) $\alpha_\pm(x) = 0$ при $|x| > a$, iii) $\int\limits_{-a}^{a} \alpha_\pm(y)\,dy = 1$, так что $\hat\alpha_\pm(0) = 1$. Поэтому

$$\zeta_\pm(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta(\pm y)\alpha_\pm(x-y)\,dy, \tag{5.7}$$

где $\theta(x)$ - функция Хевисайда. Обозначим через $\mathrm{PV}(1/k)$ главное значение в смысле Коши. Так как $\hat\theta(k) = \pi\delta(k) + i\mathrm{PV}(\dfrac{1}{k})$, $k \in \mathbb{R}$, то в силу (5.7) получаем

$$\hat\zeta_\pm(k) \;=\; \Big[\pi\delta(k) \pm i\,\mathrm{PV}\Big(\frac{1}{k}\Big)\Big]\hat\alpha_\pm(k) = \pi\delta(k) \pm i\,\mathrm{PV}\Big(\frac{1}{k}\Big)\hat\alpha_\pm(k). \quad \blacksquare$$

Из условий **S1** и **S2** следует, что $Q_0(x,y)$ - непрерывные ограниченные функции. Следовательно, они принадлежат пространству умеренных распределений Шварца так же, как их преобразования Фурье. Применим преобразование Фурье к функции $Q_0(x,y)$:

$$\hat Q_0(k,k') := F_{\substack{x\to k\\ y\to -k'}} Q_0(x,y), \quad k,k' \in \mathbb{R}^n. \tag{5.8}$$

Тогда справедливо следующее предложение.

Предложение 5.5 *Пусть выполнены условия* **S0**-**S3**. *Тогда*

$$\hat Q_0(k,k') = \hat Q_0^1(k,k') + \hat Q_0^2(k,k') + \hat Q_0^3(k,k'), \tag{5.9}$$

где слагаемые допускают следующие представления,

$$\hat Q_0^1(k,k') \;=\; \delta(k-k')\;(2\pi)^n\frac{1}{4}(\hat q_+(k) + \hat q_-(k)), \tag{5.10}$$

$$\hat Q_0^2(k,k') \;=\; \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')(2\pi)^{n-2}\sum_\pm \mathrm{PV}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\hat\alpha_\pm(k_n-\xi)}{k_n-\xi}\frac{\overline{\hat\alpha_\pm}(k'_n-\xi)}{k'_n-\xi}\hat q_\pm(\mathbf{k},\xi)\,d\xi, \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}\hat Q_0^3(k,k') \;=\;& \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\;(2\pi)^{n-2}\pi i\;\mathrm{PV}(\frac{1}{k_n-k'_n})\Big[\hat q_+(k)\overline{\hat\alpha_+}(k'_n-k_n)\\ &+\hat q_+(k')\hat\alpha_+(k_n-k'_n) - \hat q_-(k)\overline{\hat\alpha_-}(k'_n-k_n) - \hat q_-(k')\hat\alpha_-(k_n-k'_n)\Big].\end{aligned} \tag{5.12}$$

Здесь и ниже полагаем $k = (\mathbf{k}, k_n)$, $\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_{n-1})$.

Доказательство. Применяя равенство $\widehat{fg} = (2\pi)^{-2n}\hat{f} * \hat{g}$ для умеренных распределений в $\mathbb{R}^{2n}$, получаем из (2.9), формально,

$$
\begin{aligned}
\hat{Q}_0(k,k') &:= F_{\substack{x\to k\\ y\to -k'}}[\sum_{\pm}\zeta_{\pm}(x_n)\zeta_{\pm}(y_n)q_{\pm}(x-y)] \\
&= (2\pi)^{-2n}\sum_{\pm}\Big(F_{x\to k}(\zeta_{\pm}(x_n))\overline{F_{y\to k'}(\zeta_{\pm}(y_n))}\Big) * (2\pi)^n\hat{q}_{\pm}(k)\delta(k-k') \\
&= (2\pi)^{n-2}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\sum_{\pm}\int_{\mathbb{R}}\Big[\hat{\zeta}_{\pm}(k_n-\xi)\overline{\hat{\zeta}_{\pm}}(k_n'-\xi)\hat{q}_{\pm}(\mathbf{k},\xi)\Big]\,d\xi, \qquad (5.13)
\end{aligned}
$$

где $*$ обозначает свертку по k и k'. Она существует в смысле умеренных распределений, так как распределение $\hat{\zeta}_{\pm}(\xi)$ - гладкая функция при $\xi \neq 0$ и быстро убывает при $|\xi| \to \infty$, а $\hat{q}_{\pm}$ - ограниченные непрерывные функции. Последний интеграл существует по тем же причинам, как предел римановских интегральных сумм по ξ со значениями в умеренных распределениях от (k,k'). Подставляя (5.6) в (5.13), получаем

$$
\begin{aligned}
\hat{Q}_0(k,k') &= (2\pi)^{n-2}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\sum_{\pm}\mathrm{PV}\int_{\mathbb{R}^1}\hat{q}_{\pm}(\mathbf{k},\xi)\Big[\pi\delta(k_n-\xi)\pm i\,\frac{\hat{\alpha}_{\pm}(k_n-\xi)}{k_n-\xi}\Big] \\
&\quad \Big[\pi\delta(k_n'-\xi)\mp i\,\frac{\overline{\hat{\alpha}_{\pm}}(k_n'-\xi)}{k_n'-\xi}\Big]\,d\xi. \qquad (5.14)
\end{aligned}
$$

Наконец, из (5.14) вытекают формулы (5.9)-(5.12). ■

6 Равномерные оценки и сходимость ковариации

В этом параграфе мы докажем равномерную оценку и сходимость (1.10) для ковариации $Q_t(x,y)$ меры μ_t, введенной в Определении 2.5. Обозначим

$$
\mathcal{Q}_t(\Psi,\Psi) := \langle Q_t(x,y), \Psi(x)\otimes\Psi(y)\rangle, \quad \Psi\in\mathcal{S}, \qquad (6.1)
$$

где $\mathcal{S} = S \oplus S$, и $S \equiv S(\mathbb{R}^n)$ - обозначает пространство Шварца. Введем подпространство пробных функций $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$:

$$
\mathcal{S}_0 = \cup_N \mathcal{S}_N, \quad \mathcal{S}_N := \{\Psi\in\mathcal{S} :\ \hat{\Psi}(k) = 0 \ \text{ при } |k|\geq N \text{ или } |k_n|\leq 1/N\}. \qquad (6.2)
$$

Лемма 6.1 *Пусть* $\lim\limits_{t\to\infty}\mathcal{Q}_t(\Psi,\Psi) = \mathcal{Q}_\infty(\Psi,\Psi)$ *для любых* $\Psi\in\mathcal{S}_0$. *Тогда та же сходимость выполняется и для всех* $\Psi\in\mathcal{S}$.

Доказательство. Во-первых, из (10.1) следует, что $\langle Y(x,t),\Psi(x)\rangle = \langle Y_0(x),\Phi(x,t)\rangle$, где $\Phi(\cdot,t) = F^{-1}[\hat{\mathcal{G}}_t^*(k)\hat{\Psi}(k)]$. Поэтому, $\mathcal{Q}_t(\Psi,\Psi) = \mathcal{Q}_0(\Phi(\cdot,t),\Phi(\cdot,t))$. Следовательно,

$$
\sup_{t\in\mathbb{R}}|\mathcal{Q}_t(\Psi,\Psi)| \leq C\sup_{t\in\mathbb{R}}\|\Phi(\cdot,t)\|^2_{L^2} \qquad (6.3)
$$

в силу пункта *i)* Следствия 5.2. Применяя равенство Парсеваля и формулы (10.3), (10.4), получаем:

$$
\|\Phi(\cdot,t)\|^2_{L^2} = (2\pi)^{-n}\int|\hat{\mathcal{G}}_t^*(k)\hat{\Psi}(k)|^2\,dk \leq C\|\Psi\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)}. \qquad (6.4)
$$

Для любой функции $\Psi \in \mathcal{S}$ можно подобрать такую функцию $\Psi_N \in \mathcal{S}_N$, что

$$\hat{\Psi}_N(k) = \begin{cases} \hat{\Psi}(k), & \text{если} \quad |k| \le N/2 \text{ и } |k_n| \ge 2/N, \\ 0, & \text{если} \quad |k| \ge N \text{ или } |k_n| \le 1/N, \end{cases}$$

и, кроме того,

$$\|\Psi_N - \Psi\|^2_{H^1} = \int (|k|^2 + 1)|\hat{\Psi}_N(k) - \hat{\Psi}(k)|^2 dk \to 0, \quad N \to \infty. \tag{6.5}$$

Поэтому данная лемма вытекает из (6.3)-(6.5) и Следствия 5.3. ■

Предложение 6.2 *Пусть выполнены условия* **S0-S3**. *Тогда i) функция* $Q_t(x,y)$ *непрерывна и*

$$\sup_{t\ge 1} \sup_{x \in B_R} |Q_t(x,x)| < \infty, \quad R > 0. \tag{6.6}$$

ii) Корреляционные функции сходятся в смысле распределений, т.е.

$$\mathcal{Q}_t(\Psi, \Psi) \to \mathcal{Q}_\infty(\Psi, \Psi), \quad t \to \infty, \quad \Psi \in \mathcal{S}. \tag{6.7}$$

Доказательство. Так как решение $Y(t)$ задачи Коши (3.1) имеет вид $Y(t) = \Big(\mathcal{G}_t(\cdot) * Y_0\Big)(x)$, то $Q_t(x,y)$ допускает представление в виде свертки

$$Q_t(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \Big(\mathcal{G}_t(x-x') Q_0(x',y') \mathcal{G}^T_t(y-y')\Big)\, dx'dy',$$

существование которой доказывается через преобразование Фурье. А именно, применим преобразование Фурье к матрице $Q_t(x,y)$:

$$\hat{Q}_t(k,k') := F_{\substack{x \to k \\ y \to -k'}} Q_t(x,y) = \hat{\mathcal{G}}_t(k) \hat{Q}_0(k,k') \hat{\mathcal{G}}^T_t(-k'), \quad k,k' \in \mathbb{R}^n,$$

где матрица $\hat{\mathcal{G}}_t(k)$ определена в (10.4), а $\hat{Q}_0(k,k')$ - в (5.8). Используя четность $\hat{\mathcal{G}}^T_t(-k') = \hat{\mathcal{G}}^T_t(k')$ и разложение (5.9), разобьем $Q_t(x,y)$ на три слагаемых: $Q_t(x,y) = Q^1_t(x,y) + Q^2_t(x,y) + Q^3_t(x,y)$, где

$$Q^j_t(x,y) := (2\pi)^{-2n} \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-ikx+ik'y} \hat{\mathcal{G}}_t(k) \hat{Q}^j_0(k,k') \hat{\mathcal{G}}^T_t(k')\, dkdk', \quad x,y \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \tag{6.8}$$

$j = 1,2,3$. Теперь для доказательства Предложения 6.2 достаточно проверить оценку (6.6) и сходимость к пределу (6.7) для каждого слагаемого $Q^j_t(x,y)$ с $j = 1,2,3$. Мы сделаем это в леммах 6.3, 6.4 и 6.7, приведенных ниже.

Лемма 6.3 *i) Функция* $Q^1_t(x,y)$ *непрерывна и* $\sup\limits_{t\ge 0} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} Q^1_t(x,x) \le C < \infty$.
ii) $Q^1_t(x,y) \to q^+_\infty(x-y)/2$, *при* $t \to \infty$ *для любых* $x,y \in \mathbb{R}^n$ *,где матрица* $\hat{q}^+_\infty$ *определена в (2.17).*

Доказательство. *i)* Подставляя (5.10) в (6.8), получаем

$$\hat{Q}_t^1(k,k') = (2\pi)^n \delta(k-k') \hat{\mathcal{G}}_t(k) \frac{1}{2} \hat{\mathbf{q}}^+(k) \hat{\mathcal{G}}_t^T(k), \tag{6.9}$$

где $\hat{\mathbf{q}}^+(k) := (\hat{q}_+(k) + \hat{q}_-(k))/2$. Следовательно,

$$Q_t^1(x,y) \equiv q_t^1(x-y) = (2\pi)^{-n} \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-y)k} \hat{\mathcal{G}}_t(k) \hat{\mathbf{q}}^+(k) \hat{\mathcal{G}}_t^T(k)\, dk, \quad x,y \in \mathbb{R}^n. \tag{6.10}$$

Поэтому, из (5.5) и формулы (10.4) вытекает пункт *i)* Леммы 6.3.

ii) Применяя (10.6) к $\hat{q}(k) := \hat{\mathbf{q}}^+(k)$, получаем, что

$$q_t^1(z) = (2\pi)^{-n} \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-izk} \hat{q}_\infty^+(k)\, dk + o(1), \ \ t \to \infty, \ \ z \in \mathbb{R}^n,$$

т.к. остальные осциллирующие интегралы в (6.10) стремятся к нулю при $t \to \infty$ ввиду (5.5) по теореме Лебега - Римана. ■

Лемма 6.4 *i) Функция* $Q_t^2(x,y)$ *непрерывна и* $\sup\limits_{t \ge 1} \sup\limits_{x \in B_R} Q_t^2(x,x) \le C < \infty$ *при любом* $R > 0$.
ii) $\lim\limits_{t \to \infty} \langle Q_t^2(x,y), \Psi(x) \otimes \Psi(y) \rangle = 1/2 \langle q_\infty^+(x-y), \Psi(x) \otimes \Psi(y) \rangle$, $\Psi \in \mathcal{S}$.

Доказательство. *i)* Подставляя (5.11) в (6.8), получаем, что

$$\begin{aligned} Q_t^2(x,y) &\equiv (2\pi)^{-2n} \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-ikx+ik'y}\ \hat{\mathcal{G}}_t(k) \hat{Q}_0^2(k,k') \hat{\mathcal{G}}_t^T(k')\, dk dk' \\ &= (2\pi)^{-n-2} \sum_{\pm} \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} d\mathbf{k} dk_n dk_n' \Big[e^{-ikx+ik'y}\ \hat{\mathcal{G}}_t(k) \\ &\quad \times \mathrm{PV} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\alpha}_\pm(k_n - \xi)}{k_n - \xi} \frac{\overline{\hat{\alpha}_\pm}(k_n' - \xi)}{k_n' - \xi} \hat{q}_\pm(\mathbf{k}, \xi)\, d\xi\, \hat{\mathcal{G}}_t^T(k') \Big] \Big|_{k' = (\mathbf{k}, k_n')}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

После замены переменных получаем представление

$$Q_t^2(x,y) = (2\pi)^{-n-2} \sum_{\pm} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ik(x-y)} J_\pm(t, x_n, k) \hat{q}_\pm(k) J_\pm^*(t, y_n, k)\, dk, \tag{6.12}$$

где через $J_\pm(t,x_n,k) = \Big(J_\pm^{ij}(t,x_n,k) \Big)_{i,j=0,1}$ обозначен матричнозначный интеграл

$$J_\pm(t,x_n,k) := \mathrm{PV} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x_n} \frac{\hat{\alpha}_\pm(\xi)}{\xi} \hat{\mathcal{G}}_t(\mathbf{k}, k_n + \xi)\, d\xi, \tag{6.13}$$

а $J_\pm^*$ - его эрмитовое сопряжение.

Предложение 6.5 *При любом* $k \in \mathbb{R}^n$ *функции* $J_\pm(t, x_n, k)$ *непрерывны и равномерно ограничены при* $t > 1$ *и* $x_n \in [-R, R]$ *, причем*

$$\sup_{t \geq 1, |x_n| \leq R} |J_\pm^{ij}(t, x_n, k)| < C_1 + C_2 |\hat{C}^{ij}(k)|, \quad i, j = 0, 1, \tag{6.14}$$

где $\hat{C}^{ij}(k)$ *определены в (10.3), и константы* C_1 *,* C_2 *не зависят от* k *.*

Это предложение доказано в Приложении Б. Теперь пункт *i)* Леммы 6.4 вытекает из (6.12) и оценки (6.14) ввиду (5.5) по теореме Лебега о мажорируемой сходимости.

ii) В силу Леммы 6.1 достаточно рассмотреть случай $\Psi \in \mathcal{S}_N$ с произвольным $N \in \mathbb{N}$. Из формулы (6.12) получаем:

$$\begin{aligned} \langle Q_t^2(x, y), \Psi(x) \otimes \Psi(y) \rangle &= (2\pi)^{-2n} \langle \hat{\mathcal{G}}_t(k) \hat{Q}_0^2(k, k') \hat{\mathcal{G}}_t^T(k'), \hat{\Psi}(k) \otimes \overline{\hat{\Psi}}(k') \rangle \\ &= (2\pi)^{-n-2} \sum_\pm \int_{\mathbb{R}^n} j_\pm(t, k) \hat{q}_\pm(k) j_\pm^*(t, k)\, dk, \end{aligned} \tag{6.15}$$

где через $j_\pm(t, k)$ обозначается векторнозначный интеграл

$$j_\pm(t, k) \;:=\; \mathrm{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\alpha}_\pm(\xi)}{\xi} \overline{\hat{\Psi}}(\mathbf{k}, k_n + \xi) \hat{\mathcal{G}}_t(\mathbf{k}, k_n + \xi)\, d\xi. \tag{6.16}$$

Напомним, что $\Psi \in \mathcal{S}_N$, поэтому $k \in \operatorname{supp} \hat{\Psi} \subset B_N^0 := \{k \in B_N : |k_n| \geq 1/N\}$, где через B_N обозначается шар радиуса N .

Лемма 6.6 *Пусть* $\Psi \in \mathcal{S}_N$ *с некоторым произвольным* $N \in \mathbb{N}$ *. Тогда для* $k \in \mathbb{R}^n$

$$j_\pm(t, k) \;=\; -\pi \operatorname{sgn} k_n \overline{\hat{\Psi}}(k) [\sin \omega(k) t - \cos \omega(k) t\, \hat{C}(k)] + o(1), \quad t \to +\infty, \tag{6.17}$$

где $o(1)$ *стремится к нулю равномерно по* $k \in \mathbb{R}^n$ *.*

Доказательство. Из формулы (10.4) вытекает, что достаточно доказать (6.17) для интегралов вида

$$j_*(t, k) := \mathrm{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm i \omega(\mathbf{k}, k_n + \xi) t} \frac{\hat{\alpha}_+(\xi)}{\xi} g(\mathbf{k}, k_n + \xi)\, d\xi, \tag{6.18}$$

где $g(k) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с $\operatorname{supp} g \subset B_N^0$. Поскольку $g(\mathbf{k}, k_n + \xi) = 0$ при $|k_n + \xi| \leq 1/N$, то

$$|\nabla_n \omega(\mathbf{k}, k_n + \xi)| = \frac{|k_n + \xi|}{\omega(\mathbf{k}, k_n + \xi)} \geq C(N) > 0,$$

если $(\mathbf{k}, k_n + \xi) \in \operatorname{supp} g(\mathbf{k}, k_n + \xi)$ и $k \in B_N^0$. Поэтому можем применить Лемму 5 главы VII из [4, с.151] к интегралу $j_*(t, k)$ и, поскольку $\hat{\alpha}_+(0) = 1$, заключаем, что

$$j_*(t, k) = g(k) e^{\pm i \omega(k) t} \pi i \operatorname{sgn}(\pm \nabla_n \omega(k)) + o(1), \quad t \to +\infty. \quad \blacksquare$$

Подставляя (6.17) в (6.15) и применяя (10.7) к $\hat{q}(k)=\hat{q}_+(k)+\hat{q}_-(k)$, получаем ввиду (2.17), что

$$\begin{aligned}\langle Q^2_t(x,y),\Psi(x)\otimes\Psi(y)\rangle &= (2\pi)^{-n-2}\pi^2\int\limits_{\mathbb{R}^n}\overline{\hat{\Psi}}(k)\Big[\sin\omega(k)t-\cos\omega(k)t\,\hat{C}(k)\Big]\\ &\quad\Big(\hat{q}_+(k)+\hat{q}_-(k)\Big)\Big[\sin\omega(k)t\,I-\cos\omega(k)t\,\hat{C}^T(k)\Big]\hat{\Psi}(k)\,dk+o(1)\\ &= (2\pi)^{-n}\frac{1}{2}\langle\hat{q}^+_\infty(k),\hat{\Psi}(k)\otimes\overline{\hat{\Psi}}(k)\rangle+o(1),\ \ t\to\infty,\end{aligned}\tag{6.19}$$

так как оставшиеся осциллирующие интегралы стремятся к нулю при $t\to\infty$ в силу теоремы Лебега - Римана и Следствия 5.2. ■

Лемма 6.7 *i) Функция* $Q^3_t(x,y)$ *непрерывна и* $\sup\limits_{t\ge1}\sup\limits_{x\in B_R}Q^3_t(x,x)\le C<\infty$ *для любого* $R>0$.
ii) $\lim\limits_{t\to\infty}\langle Q^3_t(x,y),\Psi(x)\otimes\Psi(y)\rangle=\langle q^-_\infty(x-y),\Psi(x)\otimes\Psi(y)\rangle$ *для любых* $\Psi\in\mathcal{S}$ *, где матрица* $\hat{q}^-_\infty$ *определена в (2.18).*

Доказательство. *i)* Подставляя (5.12) в (6.8), находим

$$\begin{aligned}Q^3_t(x,y) &\equiv (2\pi)^{-2n}\int\limits_{\mathbb{R}^{2n}}e^{-ikx+ik'y}\,\hat{\mathcal{G}}_t(k)\hat{Q}^3_0(k,k')\hat{\mathcal{G}}^T_t(k')\,dkdk'\\ &= (2\pi)^{-n-2}\pi i\,\mathrm{PV}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}}\Big[e^{-ikx+ik'y}\,\hat{\mathcal{G}}_t(k)\hat{q}^3_0(k,k')\hat{\mathcal{G}}^T_t(k')\Big]\Big|_{k'=(\mathbf{k},k'_n)}dk'_ndk.\end{aligned}\tag{6.20}$$

Здесь введено обозначение

$$\begin{aligned}\hat{q}^3_0(k,k'):\ &= \Big[\overline{\hat{\alpha}_+}(k'_n-k_n)\hat{q}_+(k)+\hat{\alpha}_+(k_n-k'_n)\hat{q}_+(k')\\ &\quad-\overline{\hat{\alpha}_-}(k'_n-k_n)\hat{q}_-(k)-\hat{\alpha}_-(k_n-k'_n)\hat{q}_-(k')\Big]/(k_n-k'_n).\end{aligned}\tag{6.21}$$

Подставим (6.21) в (6.20) и рассмотрим первый из возникающих интегралов,

$$I_t(x,y):=(2\pi)^{-n-2}\pi i\,\mathrm{PV}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}}\Big[e^{-ikx+ik'y}\,\hat{\mathcal{G}}_t(k)\hat{q}_+(k)\frac{\overline{\hat{\alpha}_+}(k'_n-k_n)}{k_n-k'_n}\hat{\mathcal{G}}^T_t(k')\Big]\Big|_{k'=(\mathbf{k},k'_n)}dk'_ndk.\tag{6.22}$$

После замены переменных $k'_n\to k'_n-k_n=\xi$ получаем, что

$$I_t(x,y)=-(2\pi)^{-n-2}\pi i\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-i(x-y)k}\hat{\mathcal{G}}_t(k)\hat{q}_+(k)J^*_+(t,y_n,k)\,dk,\tag{6.23}$$

где $J_+(t,y_n,k)$ - интеграл (6.13). Поэтому из равенств (6.23) и (10.4), Предложения 6.5 и (5.5) вытекает, что для $x,y\in B_R$

$$|I_t(x,y)|\le C\int\limits_{\mathbb{R}^n}(1+|\hat{C}(k)|)|\hat{q}_+(k)|(1+|\hat{C}^T(k)|)\,dk\le C_1<\infty,$$

что и доказывает пункт *i)* Леммы 6.7.

ii) Согласно Лемме 6.1, достаточно доказать пункт *ii)* Леммы 6.7 для $\Psi \in \mathcal{S}_N$ с любым фиксированным $N \in \mathbb{N}$. Применяя формулу (6.20), получаем

$$\begin{aligned} &\langle Q_t^3(x,y), \Psi(x)\otimes\Psi(y)\rangle = (2\pi)^{-2n}\langle \hat{Q}_t^3(k,k'), \hat{\Psi}(k)\otimes\overline{\hat{\Psi}}(k')\rangle \\ = \ &(2\pi)^{-n-2}\pi i\,\mathrm{PV}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \Big[\overline{\hat{\Psi}}(k)\hat{\mathcal{G}}_t(k)\hat{q}_0^3(k,k')\hat{\mathcal{G}}_t^T(k')\hat{\Psi}(k')\Big]\Big|_{k'=(\mathbf{k},k_n')} dk_n' dk. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Подставим в (6.24) формулу (6.21) и рассмотрим, например, первое слагаемое $\langle I_t(x,y), \Psi(x)\otimes\Psi(y)\rangle$ с $\Psi\in\mathcal{S}_N$ и $I_t(x,y)$, определенным в (6.22). Делая замену переменных $k_n' \to k_n' - k_n = \xi$, получаем, что

$$I_t(\Psi) \equiv \langle I_t(x,y), \Psi(x)\otimes\Psi(y)\rangle = -(2\pi)^{-n-2}\pi i\int\limits_{\mathbb{R}^n}\overline{\hat{\Psi}}(k)\hat{\mathcal{G}}_t(k)\hat{q}_+(k)j_+^*(t,k)dk, \tag{6.25}$$

где $j_+(t,k)$ определено в (6.16). Подставляя формулу (6.17) в интеграл, стоящий в правой части (6.25), получаем

$$I_t(\Psi) = (2\pi)^{-n-2}\pi^2 i\int\limits_{\mathbb{R}^n}\overline{\hat{\Psi}}(k)\hat{\mathcal{G}}_t(k)\hat{q}_+(k)[\sin\omega t - \cos\omega t\hat{C}^T(k)]\,\mathrm{sgn}\,k_n\hat{\Psi}(k)\,dk + o(1).$$

Далее, применяя формулу (10.8) с $\hat{q}(k)=\hat{q}_+(k)$, заключаем, что при $t\to\infty$,

$$I_t(\Psi) = (2\pi)^{-n}\frac{i}{8}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\overline{\hat{\Psi}}(k)\,\Big(\hat{C}(k)\hat{q}_+(k) - \hat{q}_+(k)\hat{C}^T(k)\Big)\,\mathrm{sgn}\,k_n\hat{\Psi}(k)\,dk + o(1), \tag{6.26}$$

так как оставшиеся осциллирующие интегралы стремятся к нулю при $t\to\infty$ в силу теоремы Лебега-Римана и (5.5). Отсюда вытекает сходимость $I_t(\Psi)$ к пределу при $t\to\infty$. Аналогичный анализ дает пределы типа (6.26) для всех остальных членов в (6.24). Окончательно,

$$\begin{aligned} \langle Q_t^3(x,y), \Psi(x)\otimes\Psi(y)\rangle &= (2\pi)^{-n}\frac{i}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\overline{\hat{\Psi}}(k)\,\Big(\hat{C}(k)\hat{\mathbf{q}}^-(k) - \hat{\mathbf{q}}^-(k)\hat{C}^T(k)\Big)\,\mathrm{sgn}\,k_n\hat{\Psi}(k)\,dk \\ &= (2\pi)^{-n}\langle\hat{q}_\infty^-(k), \hat{\Psi}(k)\otimes\overline{\hat{\Psi}}(k)\rangle + o(1), \ \ t\to+\infty, \end{aligned}$$

где $\hat{\mathbf{q}}^-(k) = (\hat{q}_+(k) - \hat{q}_-(k))/2$. ■

Теперь Предложение 6.2 вытекает из Лемм 6.3, 6.4 и 6.7. ■

7 Компактность семейства мер

Предложение 3.2 можно вывести из оценки (7.19), приведенной ниже, с помощью теоремы Прохорова (см. Лемму 3.1 в [5, с.62]). Предварительно докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 7.1 *Функция* $\nabla_x\cdot\nabla_y Q_t^{00}(x,y)$ *непрерывна и*

$$\sup_{t\ge 1}\sup_{x\in B_R}\Big(\nabla_x\cdot\nabla_y Q_t^{00}(x,y)\Big|_{x=y}\Big) \le C < \infty, \ \ R>0. \tag{7.1}$$

Доказательство. Для простоты рассмотрим случай когда $Y_0^0(x)\equiv 0$ п.н. (Общий случай $Y_0^0(x)\not\equiv 0$ доказывается аналогично). Тогда

$$\begin{aligned}\nabla_x\cdot\nabla_y Q_t^{00}(x,y) &= (2\pi)^{-2n}\int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-ikx+ik'y}k\cdot k'\Big[\hat{\mathcal{G}}_t(k)\hat{Q}_0(k,k')\hat{\mathcal{G}}_t^T(k')\Big]^{00}\,dkdk'\\ &= (2\pi)^{-2n}\int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-ikx+ik'y}\frac{\sin\omega(k)t}{\omega(k)}k\cdot k'\hat{Q}_0^{11}(k,k')\frac{\sin\omega(k')t}{\omega(k')}\,dkdk'. \quad (7.2)\end{aligned}$$

Как и в доказательстве Предложения 6.2, представим $\nabla_x\cdot\nabla_y Q_t^{00}(x,y)$ в виде суммы:

$$\nabla_x\cdot\nabla_y Q_t^{00}(x,y)=\sum_{j=1}^{3}\nabla_x\cdot\nabla_y[Q_t^j(x,y)]^{00}, \quad (7.3)$$

где каждое слагаемое $\nabla_x\cdot\nabla_y[Q_t^j(x,y)]^{00}$ определяется аналогично (7.2) с функцией $[\hat{Q}_0^j(k,k')]^{11}$ в подинтегральном выражении вместо $\hat{Q}_0^{11}(k,k')$. Далее оценим каждое слагаемое $\nabla_x\cdot\nabla_y[Q_t^j(x,y)]^{00}$ отдельно методами Лемм 6.3, 6.4 и 6.7.

I. Из формул (5.10) и (7.2) получаем, что

$$\nabla_x\cdot\nabla_y[Q_t^1(x,y)]^{00} = (2\pi)^{-n}\frac{1}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ik(x-y)}\frac{|k|^2(\hat{q}_+^{11}(k)+\hat{q}_-^{11}(k))}{\omega^2(k)}(\sin\omega(k)t)^2\,dk. \quad (7.4)$$

Следовательно, в силу Предложения 5.1, ii), заключаем, что функция $\nabla_x\cdot\nabla_y[Q_t^1(x,y)]^{00}$ непрерывна по теореме Лебега о мажорируемой сходимости. Кроме того,

$$\sup_{t\ge 0}\Big|\nabla_x\cdot\nabla_y[Q_t^1(x,y)]^{00}\Big|_{y=x}\Big|\le C\int\Big(|\hat{q}_+^{11}(k)|+|\hat{q}_-^{11}(k)|\Big)\,dk<\infty. \quad (7.5)$$

II. Рассмотрим второе слагаемое в правой части (7.3) (ср. (6.11)):

$$\begin{aligned}\nabla_x\cdot\nabla_y\Big[Q_t^2(x,y)\Big]^{00} &= (2\pi)^{-n-2}\sum_{\pm}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} d\mathbf{k}dk_ndk_n'\Big[e^{-ikx+ik'y}k\cdot k'\frac{\sin\omega(k)t}{\omega(k)}\frac{\sin\omega(k')t}{\omega(k')}\\ &\times\mathrm{PV}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\hat{\alpha}_\pm(k_n-\xi)}{k_n-\xi}\frac{\overline{\hat{\alpha}_\pm}(k_n'-\xi)}{k_n'-\xi}\hat{q}_\pm^{11}(\mathbf{k},\xi)d\xi\Big]\Big|_{k'=(\mathbf{k},k_n')}. \quad (7.6)\end{aligned}$$

После замены переменных получаем, что

$$\begin{aligned}\nabla_x\cdot\nabla_y[Q_t^2(x,y)\Big]^{00} &= C\sum_{\pm}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ik(x-y)}\Big(J_\pm^{01}(t,x_n,k)\overline{J_\pm^{01}(t,y_n,k)}|\mathbf{k}|^2\\ &+\tilde{J}_\pm(t,x_n,k)\overline{\tilde{J}_\pm(t,y_n,k)}\Big)\hat{q}_\pm^{11}(k)\,dk, \quad (7.7)\end{aligned}$$

где $J_\pm^{01}(t,x_n,k)$ определено в (6.13), и

$$\tilde{J}_\pm(t,x_n,k) := \mathrm{PV}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x_n}\frac{\hat{\alpha}_\pm(\xi)}{\xi}\sin\omega(\mathbf{k},k_n+\xi)t\frac{k_n+\xi}{\omega(\mathbf{k},k_n+\xi)}\,d\xi. \quad (7.8)$$

Применяя Лемму 11.1, получаем оценку $|J^{01}_\pm(t,x_n,k)|\le C_1/\omega(k)$. Так как

$$\left|\frac{k_n+\xi}{\omega(\mathbf{k},k_n+\xi)}-\frac{k_n}{\omega(k)}\right|\le C|\xi|,$$

то $\sup_{t\ge1,|x|\le R}|\tilde J_\pm(t,x_n,k)|\le C_1<\infty$ в силу Леммы 11.1. Следовательно, в силу Предложения 5.1, ii) функция $\nabla_x\cdot\nabla_y[Q^2_t(x,y)]^{00}$ непрерывна по теореме Лебега о мажорируемой сходимости. Кроме того,

$$\left|\nabla_x\cdot\nabla_y\big[Q^2_t(x,y)\big]^{00}\Big|_{x=y}\right|\le C\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{C_1|\mathbf{k}|^2}{\omega^2(k)}+C_2\right)\Big(|\hat q^{11}_+(k)|+|\hat q^{11}_-(k)|\Big)\,d\mathbf{k}dk_n<\infty. \qquad (7.9)$$

III. Применяя (5.12) и (7.2), получаем (ср. (6.20))

$$\begin{aligned}&\nabla_x\cdot\nabla_y\big[Q^3_t(x,y)\big]^{00}\\ =\;& C_0\,\mathrm{PV}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}}e^{-ixk+iyk'}\frac{\sin\omega(k)t}{\omega(k)}k\cdot k'[\hat q^3_0(k,k')]^{11}\frac{\sin\omega(k')t}{\omega(k')}\Big|_{k'=(\mathbf{k},k'_n)}dkdk'_n, \qquad (7.10)\end{aligned}$$

где $C_0=(2\pi)^{-n-2}\pi i$ и $\hat q^3_0(k,k')$ определено в (6.21). Подставим (6.21) и оценим один из интегралов (для остальных интегралов доказательство аналогично).

$$I_t(x,y):=C_0\,\mathrm{PV}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}}e^{-ixk+iyk'}\frac{\sin\omega(k)t}{\omega(k)}k\cdot k'\hat q^{11}_+(k)\frac{\sin\omega(k')t}{\omega(k')}\frac{\overline{\hat\alpha_+}(k'_n-k_n)}{k_n-k'_n}\Big|_{k'=(\mathbf{k},k'_n)}dkdk'_n. \qquad (7.11)$$

После замены переменных $k'_n\to k'_n-k_n=\xi$ получаем, что

$$I_t(x,y)=-C_0\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-i(x-y)k}\frac{\sin\omega(k)t}{\omega(k)}\hat q^{11}_+(k)J_2(t,y_n,k)\,dk, \qquad (7.12)$$

где

$$J_2(t,y_n,k):=\mathrm{PV}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\xi y_n}\frac{\overline{\hat\alpha_+}(\xi)}{\xi}\sin\omega(\mathbf{k},k_n+\xi)t\frac{k^2+k_n\xi}{\omega(\mathbf{k},k_n+\xi)}\,d\xi. \qquad (7.13)$$

Заметим, что

$$\left|\frac{k^2+k_n\xi}{\omega(\mathbf{k},k_n+\xi)}-\frac{k^2}{\omega(k)}\right|\le|\xi|\frac{k^2}{\omega(k)}.$$

Следовательно, в силу Леммы 11.2, $\sup\limits_{t\ge1,|y_n|\le R}|J_2(t,y_n,k)|\le Ck^2/\omega(k)$. Поэтому, из (7.13) и Предложения 5.1, ii) вытекает, что функция $\nabla_x\cdot\nabla_y[Q^3_t(x,y)]^{00}$ непрерывна по теореме Лебега о мажорируемой сходимости. Кроме того,

$$\sup_{t\ge1,x\in B_R}|I_t(x,x)|\le C\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\sin\omega(k)t\frac{|k|^2}{\omega^2(k)}\hat q^{11}_+(k)\right|\,dk\le C\|\hat q^{11}_+\|_{L^1}<\infty. \quad\blacksquare$$

Обозначим

$$e_t(x,x'):=Q^{00}_t(x,x')+\nabla_x\cdot\nabla_{x'}Q^{00}_t(x,x')+Q^{11}_t(x,x'). \qquad (7.14)$$

Лемма 7.2

$$E\|U_0(t)Y_0(\cdot)\|_R^2 = \int\limits_{|x|<R} e_t(x,x)\,dx, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{7.15}$$

Доказательство. Из оценки (3.4) для $U_0(t)Y_0 = Y(x,t) = (Y^0(x,t), Y^1(x,t))$ вытекает, что

$$E\|Y(\cdot,t)\|_R^2 \le E\|Y_0(\cdot)\|_{R+t}^2 < \infty \tag{7.16}$$

в силу условия **S2** и теоремы Фубини. Следовательно, математическое ожидание $E\|Y(\cdot,t)\|_R^2$ конечно для любых $R > 0$, $t \ge 0$. Отсюда, в свою очередь, по теореме Фубини получаем, что

$$E\Big(|Y^0(x,t)|^2 + |\nabla Y^0(x,t)|^2 + |Y^1(x,t)|^2\Big) < \infty, \quad x \in X \subset \mathbb{R}^n,$$

где $\mathrm{mes}\,(\mathbb{R}^n \setminus X) = 0$. Следовательно, по неравенству Коши-Буняковского,

$$E\Big(|Y^0(x,t)Y^0(x',t)| + |\nabla_x Y^0(x,t)\cdot\nabla_{x'}Y^0(x',t)| + |Y^1(x,t)Y^1(x',t)|\Big) < \infty, \quad x, x' \in X. \tag{7.17}$$

Возьмем $\theta_k(x) = k^n\theta(kx)$, где $\theta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\int \theta(x)dx = 1$ и $\theta(x) \ge 0$. Тогда по определению корреляционных функций (2.6),

$$E\|\theta_k * Y(\cdot,t)\|_R^2 = \int\limits_{|x|\le R} dx \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \theta_k(x-y)\theta_k(x-y')e_t(y,y')\,dydy'. \tag{7.18}$$

Очевидно, $\theta_k(x) \to \delta(x)$ при $k \to \infty$. Поэтому правая часть равенства (7.18) сходится к $\int\limits_{|x|\le R} e_t(x,x)\,dx$, поскольку $e_t(\cdot,\cdot) \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, а левая - к $E\|Y(\cdot,t)\|_R^2$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости. Действительно, $\|\theta_k * Y(\cdot,t)\|_R \to \|Y(\cdot,t)\|_R$ при $k \to \infty$, и $\|\theta_k * Y(\cdot,t)\|_R \le \|Y(\cdot,t)\|_{R+R(\theta)}$, причем $\|Y(\cdot,t)\|_{R+R(\theta)}^2$ является суммируемой мажорантой в силу (7.16). Таким образом, из (7.18) при $k \to \infty$ вытекает (7.15). ■

Следствие 7.3 *Из оценки (7.17) следует сходимость интегралов (2.5) при почти всех* $(x,y) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Лемма 7.4 *Пусть выполнены условия* **S0**–**S3**. *Тогда*

$$\sup_{t\ge 0} E\|U_0(t)Y_0\|_R^2 < \infty, \quad R > 0. \tag{7.19}$$

Доказательство. Из леммы 7.2 вытекает, что

$$E\|Y(\cdot,t)\|_R^2 = \int\limits_{|x|<R} e_t(x,x)\,dx.$$

Из пункта *i)* Предложения 6.2 и Леммы 7.1 вытекает, что $\sup_{t\ge 1, x\in B_R} e_t(x,x) \le \bar{e} < \infty$. Следовательно,

$$E\|U_0(t)Y_0\|_R^2 = \int\limits_{B_R} e_t(x,x)\,dx \le \bar{e}|B_R| < \infty. \quad ■$$

Наконец, Предложение 3.2 следует из (7.19) при помощи методов [5]. ■

8 Сходимость характеристических функционалов

В этом разделе мы применяем метод ‘комнат-коридоров’ С.Н. Бернштейна для доказательства Предложения 3.3. Перепишем (3.5) в виде

$$\int \exp\Big(i\langle U_0(t)Y_0,\Psi\rangle\Big)\,\mu_0(dY_0)\to\exp\Big\{-\frac{1}{2}\mathcal{Q}_\infty(\Psi,\Psi)\Big\},\quad t\to\infty. \tag{8.1}$$

Мы используем стандартное интегральное представление для $U_0(t)Y_0$, разбиваем область интегрирования на "комнаты"и "коридоры"и оцениваем их вклад. В результате, выражение $\langle U_0(t)Y_0,\Psi\rangle$ в (8.1) представляется в виде суммы слабо зависимых случайных величин. Далее, мы оцениваем дисперсии этих случайных величин. Аналогичный метод был использован в параграфе 7 из [12, с.17-19]. Однако, доказательства не тождественны, так как здесь мы рассматриваем не трансляционно-инвариантные меры.

Сначала оценим $\langle U_0(t)Y_0,\Psi\rangle$ в (8.1), используя двойственную группу. Для $t\in\mathbb{R}$, введем ‘формально сопряженные’ операторы $U_0'(t)$, $U'(t)$ из пространства $\mathcal{D}$ в подходящее пространство распределений. Например,

$$\langle Y,U_0'(t)\Psi\rangle=\langle U_0(t)Y,\Psi\rangle,\quad \Psi\in\mathcal{D},\quad Y\in\mathcal{H}. \tag{8.2}$$

Обозначим $\Phi(\cdot,t)=U_0'(t)\Psi$. Тогда (8.2) можно переписать в виде

$$\langle Y(t),\Psi\rangle=\langle Y_0,\Phi(\cdot,t)\rangle,\quad t\in\mathbb{R}. \tag{8.3}$$

Сопряженные группы допускают простое описание. Лемма 8.1 показывает, что действие групп $U_0'(t)$, $U'(t)$ совпадает, соответственно, с действием групп $U_0(t)$, $U(t)$ с точностью до порядка компонент. В частности, $U_0'(t)$, $U'(t)$ - непрерывные группы операторов из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}$.

Лемма 8.1 *(Лемма 7.1 из [12, с.17]) Для* $\Psi=(\Psi^0,\Psi^1)\in\mathcal{D}$,

$$U_0'(t)\Psi=(\dot\phi(\cdot,t),\phi(\cdot,t)),\quad U'(t)\Psi=(\dot\psi(\cdot,t),\psi(\cdot,t)), \tag{8.4}$$

где $\phi(x,t)$ *- решение уравнения (3.1) с начальными данными* $(u_0,v_0)=(\Psi^1,\Psi^0)$, *а* $\psi(x,t)$ *- решение уравнения (1.1) с начальными данными* $(u_0,v_0)=(\Psi^1,\Psi^0)$.

Далее разобьем пространство $\mathbb{R}^n$ на ‘комнаты’ и ‘коридоры’. Для данного $t>0$ выберем $d\equiv d_t\ge 1$ и $\rho\equiv\rho_t>0$ следующим образом: выберем $0<\delta<1$ и $\rho_t\sim t^{1-\delta}$, $d_t\sim t/\log t$, $t\to\infty$. Положим $h=d+\rho$ и

$$a^j=jh,\;\; b^j=a^j+d,\;\; j\in\mathbb{Z}. \tag{8.5}$$

Назовем слои $R_t^j=\{x\in\mathbb{R}^n:\ a^j\le x_n\le b^j\}$ ‘комнатами’ и слои $C_t^j=\{x\in\mathbb{R}^n:\ b^j\le x_n\le a_{j+1}\}$ - ‘коридорами’. Здесь $x=(x_1,\dots,x_n)$, d - ширина комнаты, и ρ - коридора.

Обозначим через χ_r характеристическую функцию интервала $[0,\ d]$ и через χ_c - интервала $[d,\ h]$ так, что $\sum_{j\in\mathbf{Z}}(\chi_r(s-jh)+\chi_c(s-jh))=1$ при (почти всех) $s\in\mathbb{R}$. Тогда справедливо следующее разложение:

$$\langle Y_0,\Phi(\cdot,t)\rangle=\sum_{j\in\mathbf{Z}}(\langle Y_0,\chi_r^j\Phi(\cdot,t)\rangle+\langle Y_0,\chi_c^j\Phi(\cdot,t)\rangle), \tag{8.6}$$

где $\chi_r^j := \chi_r(x_n - jh)$ и $\chi_c^j := \chi_c(x_n - jh)$. Рассмотрим случайные величины r_t^j, c_t^j, где

$$r_t^j = \langle Y_0, \chi_r^j \Phi(\cdot, t)\rangle, \quad c_t^j = \langle Y_0, \chi_c^j \Phi(\cdot, t)\rangle, \qquad j \in \mathbb{Z}. \tag{8.7}$$

Тогда из (8.3) и (8.6) следует, что

$$\langle U_0(t) Y_0, \Psi\rangle = \sum_{j\in\mathbf{Z}} (r_t^j + c_t^j). \tag{8.8}$$

Заметим, что ряд в (8.8) является конечной суммой. Действительно, носитель supp $\Psi \subset B_{\overline{r}}$ с некоторым $\overline{r} > 0$. Поэтому, в силу принципа Гюгенса, носитель функции Φ при $t > 0$ есть подмножество 'переднего усеченного конуса' (см. [12, с.18]):

$$\operatorname{supp}\Phi \subset \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : \ |x| \le t + \overline{r}\}. \tag{8.9}$$

Но тогда из (8.7) вытекает, что

$$r_t^j = c_t^j = 0 \quad \text{при} \quad jh + t < -\overline{r} \quad \text{или} \quad jh - t > \overline{r}. \tag{8.10}$$

Следовательно, ряд (8.8) является конечной суммой

$$\langle U_0(t) Y_0, \Psi\rangle = \sum_{-N_t}^{N_t} (r_t^j + c_t^j), \quad N_t \sim \frac{t}{h}. \tag{8.11}$$

Лемма 8.2 *Пусть* $n \ge 1$, $m > 0$, *и выполнены условия* **S0–S3**. *Тогда при* $t > 1$ *справедливы следующие оценки:*

$$E|r_t^j|^2 \le C(\Psi)\ d_t/t, \quad E|c_t^j|^2 \le C(\Psi)\ \rho_t/t, \qquad j \in \mathbb{Z}. \tag{8.12}$$

Доказательство. Мы докажем только первую оценку в (8.12), вторая доказывается аналогично. Выразим $E|r_t^j|^2$ через корреляционные матрицы. Из определения (8.7) и условия **S2** следует, в силу теоремы Фубини, что

$$E|r_t^j|^2 = \langle \chi_r^j(x_n)\chi_r^j(y_n) Q_0(x,y), \Phi(x,t)\otimes\Phi(y,t)\rangle. \tag{8.13}$$

Для функции $\Phi(x,t)$ имеет место следующая оценка (ср. с Теоремой XI.17 (b) из [29, с.54]):

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\Phi(x,t)| = \mathcal{O}(t^{-n/2}), \quad t \to \infty. \tag{8.14}$$

Применяя (8.9) и (8.14) к равенству (8.13), получаем, что

$$E|r_t^j|^2 \le C t^{-n} \int\limits_{|x|\le t+\overline{r}} \chi_r^j(x_n) \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \|Q_0(x,y)\| dy \Big)\, dx, \tag{8.15}$$

где $\|Q_0(x,y)\|$ обозначает норму матрицы $\Big(Q_0^{ij}(x,y)\Big)$. Следовательно, из пункта *i)* Предложения 5.1 вытекает первая оценка (8.12). ■

Далее сходимость (8.1) доказывается так же как в параграфах 8 и 9 из [12, с.20-25].

9 Переменные коэффициенты: Теория рассеяния для решений бесконечной энергии

В этом параграфе мы докажем Теорему **A**. Мы выведем ее из Предложений 9.5 и 9.6, приведенных ниже, используя рассуждения параграфов 10, 11 из [12, с.25-29].

Рассмотрим операторы $U'(t)$, $U'_0(t)$ в пространстве $H = L^2(\mathbb{R}^n) \oplus H^1(\mathbb{R}^n)$ (см. (2.19)). Из сохранения энергии для уравнения Клейна-Гордона вытекает следующее следствие:

Следствие 9.1 *Существует константа $C > 0$ такая, что $\forall \Psi \in H$:*

$$\|U'_0(t)\Psi\|_H \le C\|\Psi\|_H, \quad \|U'(t)\Psi\|_H \le C\|\Psi\|_H, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{9.1}$$

Лемма 9.3, приведенная ниже, вытекает из результатов Б.Р. Вайнберга (см. Теоремы 3, 4, 5 в [3]). Рассмотрим семейство ограниченных полунорм в H

$$\|\Psi\|^2_{(R)} = \int\limits_{|x|\le R} (|\Psi^0(x)|^2 + |\Psi^1(x)|^2 + |\nabla\Psi^1(x)|^2)\, dx, \qquad R > 0.$$

Обозначим через $H_{(R)}$ подпространство функций из H с носителем в шаре B_R .

Определение 9.2 *Через H_c обозначим пространство $\cup_{R>0} H_{(R)}$ со следующей сходимостью: последовательность Ψ_n сходится к Ψ в H_c при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда $\exists R > 0$ такое, что все $\Psi_n \in H_{(R)}$, и Ψ_n сходятся к Ψ в норме $\|\cdot\|_{(R)}$ при $n \to \infty$.*

Ниже под непрерывностью отображений из H_c мы понимаем непрерывность в смысле последовательностей. Для данного $t \ge 0$ обозначим

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} (t+1)^{-3/2}, & n \ge 3, \\ (t+1)^{-1} \ln^{-2}(t+2), & n = 2. \end{cases} \tag{9.2}$$

Лемма 9.3 *(см. [3]) Пусть $n \ge 2$ и выполнены условия* **E1**-**E3**. *Тогда для любых $R, R_0 > 0$ существует константа $C = C(R, R_0)$ такая, что для $\Psi \in H_{(R)}$*

$$\|U'(t)\Psi\|_{(R_0)} \le C\varepsilon(t)\|\Psi\|_{(R)}, \ t \ge 0. \tag{9.3}$$

Для данного $t \ge 0$ положим

$$\varepsilon_1(t) = \begin{cases} (t+1)^{-1/2}, & n \ge 3, \\ \ln^{-1}(t+2), & n = 2. \end{cases} \tag{9.4}$$

Теорема 9.4 *Пусть $n \ge 2$ и выполнены условия* **E1**-**E3** *и* **S0**-**S3**. *Тогда существуют линейные непрерывные операторы $W, r(t) :\ H_c \to H$ такие, что для $\Psi \in H_c$ имеем*

$$U'(t)\Psi = U'_0(t)W\Psi + r(t)\Psi, \ \ t \ge 0, \tag{9.5}$$

и справедливы следующие оценки $\forall R > 0$ и $\Psi \in H_{(R)}$:

$$\|r(t)\Psi\|_H \ \le C(R)\varepsilon_1(t)\|\Psi\|_{(R)}, \quad t \ge 0, \tag{9.6}$$

$$E|\langle Y_0, r(t)\Psi\rangle|^2 \ \le C(R)\varepsilon_1^2(t)\|\Psi\|^2_{(R)}, \quad t \ge 0. \tag{9.7}$$

Доказательство. Неравенства (9.5) и (9.6) доказываются так же как в параграфе 10 из [12, с.25-27]. Остается доказать (9.7). Во-первых, аналогично (8.13),

$$E\langle Y_0, r(t)\Psi\rangle^2 = \langle Q_0(x,y), r(t)\Psi(x)\otimes r(t)\Psi(y)\rangle =: \mathcal{Q}_0(r(t)\Psi, r(t)\Psi). \tag{9.8}$$

Следовательно, из Следствия 5.2, i) и оценки (9.6) вытекает следующее неравенство для $\Psi\in H_{(R)}$:

$$E\langle Y_0, r(t)\Psi\rangle^2 \le C\|r(t)\Psi\|^2_{L^2} \le C\|r(t)\Psi\|^2_{H} \le C(R)\varepsilon_1^2(t)\|\Psi\|^2_{(R)}. \quad \blacksquare \tag{9.9}$$

Наконец, Теорема A вытекает из двух следующих предложений:

Предложение 9.5 *Семейство мер* $\{\mu_t, t\in\mathbb{R}\}$ *слабо компактно в* $\mathcal{H}^{-\varepsilon}$, $\forall\varepsilon>0$.

Предложение 9.6 *Для любых* $\Psi\in\mathcal{D}$

$$\hat\mu_t(\Psi)\equiv\int\exp(i\langle Y,\Psi\rangle)\ \mu_t(dY)\to\exp\{-\frac{1}{2}\mathcal{Q}_\infty(W\Psi,W\Psi)\},\ \ t\to\infty. \tag{9.10}$$

Мы выведем эти предложения из Предложений 3.2 и 3.3, соответственно, с помощью Теоремы 9.4.

Доказательство предложения 9.5. Аналогично Предложению 3.2, Предложение 9.5 следует из оценок

$$\sup_{t\ge0} E\|U(t)Y_0\|_R<\infty,\quad R>0, \tag{9.11}$$

которые вытекают из Теоремы 9.4 и Предложения 3.2 так же, как в [12].

Доказательство Предложения 9.6. Из (9.5) и (9.7) следует, в силу неравенства Коши-Шварца, что

$$\begin{aligned}&|E\exp i\langle U(t)Y_0,\Psi\rangle - E\exp i\langle Y_0, U_0'(t)W\Psi\rangle|\le E|\langle Y_0, r(t)\Psi\rangle|\\ &\le (E|\langle Y_0, r(t)\Psi\rangle|^2)^{1/2}\to0,\quad t\to\infty.\end{aligned}$$

Остается доказать, что

$$E\exp i\langle Y_0, U_0'(t)W\Psi\rangle\to\exp\Big\{-\frac{1}{2}\mathcal{Q}_\infty(W\Psi,W\Psi)\Big\},\quad t\to\infty. \tag{9.12}$$

Это не вытекает прямо из Предложения 3.3, так как, вообще говоря, $W\Psi\notin\mathcal{D}$. Приблизим $W\Psi$ функциями из $\mathcal{D}$. Это возможно, так как $W\Psi\in H$, и $\mathcal{D}$ плотно в H. Следовательно, для любого $\epsilon>0$ существует $\Phi\in\mathcal{D}$ такое, что

$$\|W\Psi-\Phi\|_H\le\epsilon. \tag{9.13}$$

Теперь выведем (9.12), используя неравенство треугольника:

$$\begin{aligned}&|E\exp i\langle Y_0, U_0'(t)W\Psi\rangle-\exp\Big\{-\frac{1}{2}\mathcal{Q}_\infty(W\Psi,W\Psi)\Big\}|\\ &\le|E\exp i\langle Y_0,U_0'(t)W\Psi\rangle - E\exp i\langle Y_0,U_0'(t)\Phi\rangle|\\ &+E|\exp i\langle U_0(t)Y_0,\Phi\rangle-\exp\Big\{-\frac{1}{2}\mathcal{Q}_\infty(\Phi,\Phi)\Big\}|\\ &+|\exp\Big\{-\frac{1}{2}\mathcal{Q}_\infty(\Phi,\Phi)\Big\}-\exp\Big\{-\frac{1}{2}\mathcal{Q}_\infty(W\Psi,W\Psi)\Big\}|.\end{aligned} \tag{9.14}$$

Во-первых, применяя неравенство Коши-Шварца, получим, аналогично (9.8)-(9.9), что

$$E|\langle Y_0, U_0'(t)(W\Psi-\Phi)\rangle| \le (E|\langle Y_0, U_0'(t)(W\Psi-\Phi)\rangle|^2)^{1/2} \le C\|U_0'(t)(W\Psi-\Phi)\|_H.$$

Поэтому из (9.1) и (9.13) следует, что

$$E|\langle Y_0, U_0'(t)(W\Psi-\Phi)\rangle| \le C\epsilon, \ \ t\ge 0. \tag{9.15}$$

Теперь мы можем оценить каждое слагаемое в правой части (9.14). Первое слагаемое есть $\mathcal{O}(\epsilon)$ равномерно по $t>0$ ввиду (9.15). Второе слагаемое сходится к нулю при $t\to\infty$ в силу Предложения 3.3, так как $\Phi\in\mathcal{D}$. Наконец, третье слагаемое есть $\mathcal{O}(\epsilon)$ в силу (9.13) и непрерывности квадратичной формы $\mathcal{Q}_\infty(\Psi,\Psi)$ на $L^2(\mathbb{R}^n)\otimes\mathbb{C}^2$ (следствие 5.3). Теперь сходимость (9.12) доказана, так как $\epsilon>0$ произвольно. ■

10 Приложение A. Преобразование Фурье

Рассмотрим динамику и корреляционные функции системы (3.2). Через $F: \ w\mapsto\hat w$ обозначим преобразование Фурье обобщенных функций $w\in D'(\mathbb{R}^n)$ (см., например, [19]). Мы используем это обозначение для векторно- и матричнозначных функций.

10.1 Динамика в пространстве Фурье

В преобразовании Фурье система (3.2) становится $\dot{\hat Y}(k,t)=\hat{\mathcal{A}}_0(k)\hat Y(k,t)$, следовательно,

$$\hat Y(k,t)=\hat{\mathcal{G}}_t(k)\hat Y_0(k), \quad \hat{\mathcal{G}}_t(k)=\exp(\hat{\mathcal{A}}_0(k)t). \tag{10.1}$$

Здесь мы обозначаем

$$\hat{\mathcal{A}}_0(k)=\left(\begin{array}{cc} 0 & 1\\ -\omega^2 & 0\end{array}\right), \qquad \hat{\mathcal{G}}_t(k)=\left(\begin{array}{cc} \cos\omega t & \dfrac{\sin\omega t}{\omega}\\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t\end{array}\right), \tag{10.2}$$

где $\omega=\omega(k)=\sqrt{|k|^2+m^2}$. Обозначим через I единичную матрицу и

$$\hat C(k)\equiv\Big(\hat C^{ij}(k)\Big)_{i,j=0}^{1}:=\left(\begin{array}{cc} 0 & \omega^{-1}(k)\\ -\omega(k) & 0\end{array}\right). \tag{10.3}$$

Тогда

$$\hat{\mathcal{G}}_t(k)=\cos\omega t\, I+\sin\omega t\,\hat C(k). \tag{10.4}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{G}}_t(k)\hat Q(k,k')\hat{\mathcal{G}}_t^T(k') &= \cos\omega(k)t\,\cos\omega(k')t\ \hat Q(k,k')+\sin\omega(k)t\,\sin\omega(k')t\ \hat C(k)\hat Q(k,k')\hat C^T(k')\\ &+ \cos\omega(k)t\,\sin\omega(k')t\ \hat Q(k,k')\hat C^T(k')+\cos\omega(k)t\,\sin\omega(k')t\ \hat C(k)\hat Q(k,k')\\ &= \frac12\sum_\pm\Big\{\cos(\omega(k)\pm\omega(k'))t\ \Big(\hat Q(k,k')\mp\hat C(k)\hat Q(k,k')\hat C^T(k')\Big)\\ &\quad+\frac12\sin(\omega(k)\pm\omega(k'))t\ \Big(\hat C(k)\hat Q(k,k')\pm\hat Q(k,k')\hat C^T(k')\Big)\Big\}.\end{aligned} \tag{10.5}$$

В частном случае, когда $\hat{Q}(k,k') = \delta(k-k')\hat{q}(k)$, получаем

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{G}}_t(k)\hat{q}(k)\hat{\mathcal{G}}_t^T(k) &= \frac{1}{2}\ \{\hat{q}(k)+\hat{C}(k)\hat{q}(k)\hat{C}^T(k)\}+\frac{1}{2}\cos 2\omega(k)t\ \{\hat{q}(k)-\hat{C}(k)\hat{q}(k)\hat{C}^T(k)\}\\ &+\frac{1}{2}\sin 2\omega(k)t\ \{\hat{C}(k)\hat{q}(k)+\hat{q}(k)\hat{C}^T(k)\}. \qquad (10.6)\end{aligned}$$

Следующие формулы используются в доказательствах Лемм 6.4 и 6.7, соответственно:

$$\begin{aligned}&[\sin\omega t\, I-\cos\omega t\,\hat{C}(k)]\hat{q}(k)[\sin\omega t\, I-\cos\omega t\,\hat{C}^T(k)]\\ &=\frac{1}{2}\ \{\hat{q}(k)+\hat{C}(k)\hat{q}(k)\hat{C}^T(k)\}-\frac{1}{2}\cos 2\omega(k)t\ \{\hat{q}(k)-\hat{C}(k)\hat{q}(k)\hat{C}^T(k)\}\\ &-\frac{1}{2}\sin 2\omega(k)t\ \{\hat{C}(k)\hat{q}(k)+\hat{q}(k)\hat{C}^T(k)\}, \qquad (10.7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\hat{\mathcal{G}}_t(k)\hat{q}(k)[\sin\omega(k)t\, I-\cos\omega(k)t\,\hat{C}^T(k)]\\ =\ &\frac{1}{2}\ \{\hat{C}(k)\hat{q}(k)-\hat{q}(k)\hat{C}^T(k)\}-\frac{1}{2}\cos 2\omega(k)t\ \{\hat{q}(k)\hat{C}^T(k)+\hat{C}(k)\hat{q}(k)\}\\ &+\frac{1}{2}\sin 2\omega(k)t\ \{\hat{q}(k)-\hat{C}(k)\hat{q}(k)\hat{C}^T(k)\}. \qquad (10.8)\end{aligned}$$

11 Приложение Б. Сингулярные осциллирующие интегралы

В силу равенства (10.4) Предложение 6.5 вытекает из следующей леммы.

Лемма 11.1 *Пусть* $\omega(k)=\sqrt{|k|^2+m^2}$ *, функция* $\Omega(k)$ *равна одной из функций* $\omega(k)$ *,* $\omega^{-1}(k)$ *или* 1 *,* $x_n\in[-R,R]$ *. Тогда матричнозначный интеграл*

$$I(t,x_n,k):=\mathrm{PV}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x_n}e^{\pm i\omega(\mathbf{k},k_n+\xi)t}\frac{\hat{\alpha}_+(\xi)}{\xi}\Omega(\mathbf{k},k_n+\xi)\,d\xi$$

равномерно ограничен:

$$\sup_{|x_n|\le R,t\ge 1}|I(t,x_n,k)|\le C\,\Omega(k), \qquad (11.1)$$

где константа C *не зависит от* k *.*

Оценка (11.1) вытекает из неравенств:

$$|\omega(\mathbf{k},k_n+\xi)-\omega(k)|\le C|\xi|,\ \ \left|\omega^{-1}(\mathbf{k},k_n+\xi)-\omega^{-1}(k)\right|\le C|\xi|\omega^{-1}(k),\ \ \forall k\in\mathbb{R}^n,$$

$|e^{i\xi x_n}-1|\le\min\{|\xi||x_n|,2\}$ и следующей леммы:

Лемма 11.2 *Интеграл* $J_t(k):=\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega(\mathbf{k},k_n+\xi)t}\hat{\alpha}_+(\xi)/\xi\,d\xi$ *ограничен для всех* $t>1$ *,* $k=(\mathbf{k},k_n)\in\mathbb{R}^n$ *.*

Доказательство. Заметим, что аналогичный интеграл по окружности (вместо $\mathbb{R}$) был рассмотрен в Предложении A.4 из [2] при $n=1$ и условии $\omega^{(p)}(0)=0$, $p=1,\ldots,m-1$, и $\omega^{(m)}(0)\neq 0$ для некоторого конечного числа m . При этом предполагалось, что это неравенство и оценки для всех функций выполнены равномерно по параметру, который пробегает компактное множество. В нашем случае параметр пробегает бесконечное пространство, и эти оценки не являются равномерными, так как все производные $\partial^p_{k_n}\omega(\mathbf{k},k_n)$ стремятся к нулю при $|\mathbf{k}|\to\infty$. Поэтому Предложение A.4, ii) из [2] здесь непосредственно неприменимо и его необходимо модифицировать применительно к нашему случаю. Так как $\hat\alpha_+\in S(\mathbb{R}^1)$, то достаточно доказать, что интеграл

$$j_t(k) := \mathrm{PV}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\frac{e^{i\omega(\mathbf{k},k_n+\xi)t}}{\xi}\,d\xi \tag{11.2}$$

ограничен равномерно по $t>1$, $k\in\mathbb{R}^n$ и некоторого достаточно малого $\delta>0$. Рассмотрим отдельно два случая: $|k_n|\geq B\delta$ и $|k_n|\leq B\delta$, где B - достаточно велико.

i). Пусть $|k_n|\geq B\delta$. Тогда $\partial_{k_n}\omega(k)=k_n/\omega(k)\neq 0$. Сделаем замену переменных

$$\xi\to z\equiv z(k,\xi) := \frac{\omega(\mathbf{k},k_n+\xi)-\omega(k)}{\partial_{k_n}\omega(k)}.$$

Тогда $\omega(\mathbf{k},k_n+\xi)=\omega(k)+zk_n/\omega(k)$ и $z|_{\xi=0}=0$, $(\partial z/\partial\xi)|_{\xi=0}=1$. Поэтому, обозначая через $\xi=\varphi(k,z)$ обратную функцию к $z=z(k,\xi)$, получаем при достаточно малых δ

$$j_t(k)=e^{i\omega(k)t}\,\mathrm{PV}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\frac{e^{iztk_n/\omega(k)}\partial_z\varphi(k,z)}{\varphi(k,z)}dz+O(1)$$

равномерно по k при $|k_n|\geq B\delta$. Заметим, что $\partial_z\varphi(k,z)/\varphi(k,z)=1/z+\chi(k,z)$, где $\chi(k,z)$ - ограниченная функция при $|z|\leq\delta$ равномерно по $|k_n|\geq B\delta$, если B - достаточно велико. Следовательно,

$$j_t(k)=e^{i\omega(k)t}\,\mathrm{PV}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\frac{e^{iztk_n/\omega(k)}}{z}dz+O(1)$$

равномерно по k при $|k_n|\geq B\delta$. Далее обозначим $\lambda := tk_n/\omega(k)$. Тогда $j_t(k) = e^{i\omega(k)t}I(\lambda)+O(1)$, где $I(\lambda):=\mathrm{PV}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\frac{e^{iz\lambda}}{z}dz$. Для $|\lambda|\leq C<\infty$ имеем $|I(\lambda)|\leq|\lambda|2\delta\leq C_1$. Для $|\lambda|\geq C$, используя формулу $\lim_{\lambda\to\pm\infty}I(\lambda)=\pm\pi i$, получаем равномерную ограниченность интеграла $I(\lambda)$ при всех λ . Следовательно, для случая $|k_n|\geq B\delta$ интеграл $j_t(k)$ равномерно ограничен по t и k .

ii). Пусть $|k_n|\leq B\delta$ с фиксированным выше B . Используем, что

$$\partial^2_{k_n}\omega(\mathbf{k},0)=1/\omega(\mathbf{k},0)\neq 0,\quad \mathbf{k}\in\mathbb{R}^{n-1}.$$

Фазовая функция в интеграле (11.2) допускает представление в виде

$$\omega(\mathbf{k},k_n+\xi)=\omega(\mathbf{k},0)+(k_n+\xi)^2\partial^2_{k_n}\omega(\mathbf{k},0)/2+\ldots=\omega(\mathbf{k},0)+C_{\mathbf{k}}\mu^2(\mathbf{k},k_n+\xi),$$

где $C_{\mathbf{k}} := (2\omega(\mathbf{k},0))^{-1}$. При этом $\mu(\mathbf{k},0)=0$ и $\mu'_{k_n}(\mathbf{k},0)=1$, и интеграл (11.2) приобретает вид

$$j_t(k) = e^{i\omega(\mathbf{k},0)t}\,\mathrm{PV}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{e^{iC_{\mathbf{k}}\mu^2(\mathbf{k},k_n+\xi)t}}{\xi}d\xi.$$

Теперь введем новую переменную ζ формулой $\mu(\mathbf{k},k_n+\xi)=\mu(\mathbf{k},k_n)+\zeta$ и выразим переменную ξ через ζ. Для этого обозначим через $\varphi(\mathbf{k},\mu)=k_n$ обратную функцию к $\mu=\mu(\mathbf{k},k_n)$. Тогда $k_n+\xi=\varphi(\mathbf{k},\zeta+\mu(\mathbf{k},k_n))$. Следовательно,

$$\xi = \varphi(\mathbf{k},\zeta+\mu(\mathbf{k},k_n)) - k_n = \varphi(\mathbf{k},\zeta+\mu(\mathbf{k},k_n)) - \varphi(\mathbf{k},\mu(\mathbf{k},k_n)).$$

В частности, $\partial_\zeta\xi = \partial_\mu\varphi(\mathbf{k},\zeta+\mu(k))$ и поэтому

$$\begin{aligned} j_t(k) &= e^{i\omega(\mathbf{k},0)t}\,\mathrm{PV}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{e^{iC_{\mathbf{k}}t[\zeta+\mu(k)]^2}\partial_\mu\varphi(\mathbf{k},\zeta+\mu(k))}{\varphi(\mathbf{k},\zeta+\mu(k))-\varphi(\mathbf{k},\mu(k))}\,d\zeta + O(1) \\ &= e^{i\omega(\mathbf{k},0)t}\,\mathrm{PV}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{e^{iC_{\mathbf{k}}t[\zeta+\mu(k)]^2}}{\zeta}\,d\zeta + O(1) \end{aligned} \tag{11.3}$$

равномерно по k при $|k_n|\le B\delta$. В отличие от Предложения A.4 из [2], в нашем случае $C_{\mathbf{k}}\neq$const, и к тому же $C_{\mathbf{k}}\to 0$ при $|\mathbf{k}|\to\infty$. Введем новый параметр $\lambda := C_{\mathbf{k}}t$. Тогда

$$j_t(k) = e^{i\omega(\mathbf{k},0)t}\,\mathrm{PV}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{e^{i\lambda[z+\mu(k)]^2}}{z}\,dz + O(1)$$

равномерно по k при $|k_n|\le B\delta$. Заметим, что $|\mu(k)|\le|k_n|\le B\delta$. Теперь ограниченность последнего интеграла следует из Предложения A.4, ii) из [2]. ■

[1] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.

[2] Boldrighini C., Pellegrinotti A., Triolo L. Convergence to stationary states for infinite harmonic systems.– J. Stat. Phys., 1983, v. 30, p. 123-155.

[3] Вайнберг Б.Р. Поведение при больших временах решений уравнения Клейна-Гордона.– Труды ММО, 1974, т. 30, с. 139-158.

[4] Вайнберг Б.Р. Асимптотические методы в уравнениях математической физики. М.: Изд-во Московского ун-та, 1982, 296 с.

[5] Вишик М.И., Фурсиков А.В. Математические задачи статистической гидромеханики. М.: Наука, 1980, 442 с.

[6] Dobrushin R.L., Suhov Yu.M. On the problem of the mathematical foundation of the Gibbs postulate in classical statistical mechanics, p. 325-340 in: Mathematical Problems in Theoretical Physics, Lecture Notes in Physics, v. 80, Springer, Berlin, 1978.

[7] Dobrushin R.L., Sukhov Yu.M. Time asymptotics for some degenerate models of evolution of systems with an infinite number of particles.– J. Sov. Math., 1981, v. 16, p. 1277-1340.

[8] Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов, т.1. М.: Наука, 1971, 664 с.

[9] Дудникова Т.В. Эргодичность фазового потока волнового уравнения с перемешиванием.– Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика, 1995, no.1, с. 17–22.

[10] Дудникова Т.В., Комеч А.И. Эргодические свойства гиперболических уравнений с перемешиванием.– Теория вер. и ее применения, 1996, v. 4, no.3, с. 505-519.

[11] Dudnikova T.V. Stabilization of space-time statistical solutions of the Klein-Gordon equation.– Russian J. Math. Physics, 1997, v. 5, no.2, p. 176–188.

[12] Dudnikova T.V., Komech A.I., Kopylova E.A., Suhov Yu.M. On convergence to equilibrium distribution, I. The Klein-Gordon equation with mixing.– Com. Math. Phys., 2002, v. 225, no.1, p. 1-32.

[13] Dudnikova T.V., Komech A.I., Ratanov N.E., Suhov Yu.M. On convergence to equilibrium distribution, II. The wave equation in odd dimensions, with mixing.– J. Stat. Phys., 2002, v. 108, no.4, p. 1219-1253.

[14] Dudnikova T.V., Komech A.I., Spohn H. On a two-temperature problem for wave equation.– Markov Processes and Related Fields, 2002, v. 8, p. 43-80.

[15] Dudnikova T., Komech A., Spohn H. On convergence to statistical equilibrium for harmonic crystal.– J. Math. Phys., 2003, v. 44, no.6, p. 2595-2620. ArXiv: math-ph/0210039.

[16] Dudnikova T., Komech A., Mauser N. On two-temperature for harmonic crystals.– J. Stat. Phys., 2004, v.114, no.3/4, 1035-1083.

[17] Eckmann J.-P., Pillet C.-A., Rey-Bellet L. Non-equilibrium statistical mechanics of anharmonic chains coupled to two heat baths at different temperatures.– Commun. Math. Phys., 1999, v. 201, p. 657-697.

[18] Eckmann J.-P., Pillet C.-A., Rey-Bellet L. Entropy production in nonlinear, thermally driven Hamiltonian systems.– J. Stat. Phys., 1999, v. 95, no. 1/2, p. 305-331.

[19] Egorov Yu.V., Komech A.I., Shubin M.A. Elements of the Modern Theory of Partial Differential Equations. Springer, Berlin, 1999.

[20] Hörmander L. The Analysis of Linear Partial Differential Operators III: Pseudo-Differential Operators. Springer-Verlag, 1985.

[21] Ибрагимов И.А., Линник Ю.В.Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.

[22] Jakšić V., Pillet C.-A. Ergodic properties of classical dissipative systems. I.– Acta Math., 1998, v. 181, p. 245-282.

[23] John F. Plane Waves and Spherical Means applied to Partial Differential Equations. Interscience Publishers, New York-London, 1955.

[24] Komech A., Kopylova E., Mauser N. On convergence to equilibrium distribution for wave equation in even dimensions.– Ergodic Theory and Dynamical Systems, 2004, v.24, p.1-30.

[25] Копылова Е.А. Стабилизация статистических решений уравнения Клейна-Гордона.– Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика, 1986, no.2, с. 92–95.

[26] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983, 424 с.

[27] Petrov V.V. Limit Theorems of Probability Theory. Clarendon Press, Oxford, 1995.

[28] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т. II. М.: Мир, 1978.

[29] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т. III. М.: Мир, 1982, 443 с.

[30] Spohn H., Lebowitz J. Stationary non-equilibrium states of infinite harmonic systems.– Comm. Math. Phys., 1977, v. 54, no. 2, p. 97-120.

[31] Федорюк М.В. Метод стационарной фазы и псевдодифференциальные операторы.– УМН, 1971, v. 26, no.1, p. 67–112.

[32] Федорюк М.В. Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.