gegeben: http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/stab.201490026/abstract

r=r

E=E

Aufgabenstellung, Lösung und Gewinner wurden in Stahlbau83 publiziert:

Ist auf http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/stab.201490026/abstract zu kaufen.

L=200r

$I_r=\pi/4\cdot((3\cdot r)^4-(2\cdot r)^4)=65\cdot\pi\cdot r^4/4\approx 51.0508806208341 r^4$

Stich=4r

$EI=E\cdot I=65\cdot E\cdot\pi\cdot r^4/4\approx 51.0508806208341\cdot E\cdot r^4$

$AR=\pi*((3r)^2-(2r)^2)=5r^2\cdot\pi$

$AS=r^2\cdot\pi$

$\left(\frac{1}{AR}+\frac{1}{AS}\right)=\frac{6}{5\cdot\pi\cdot r^2}$

Annahmen:

$GA\approx\infty \Rightarrow \gamma_{Schub}\approx 1$

$\tan(\varphi)\approx\varphi \Rightarrow \tan(\varphi)=\frac{dw}{dx}\approx\varphi$

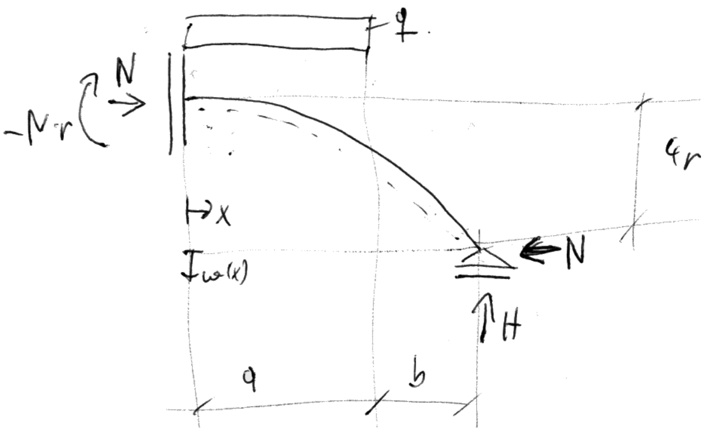
$\varkappa=\frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}\approx\frac{d^2w}{dx^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\left[1+\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}\approx 1$

$\Delta U=\frac{-N^{\mathrm{II}}\cdot l}{E\cdot AS}+\frac{1}{2}\cdot\int_{x=0}^{x=l}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx$

Rand-, Symmetrie- (und Übergangs-)bedingungen:

$\varphi_{mitte}=0$

$w_{mitte}=w(0)=-Stich=-4\cdot r$



Geometrie:

$\alpha=?_\alpha$ (mit $0\leq\alpha\leq 1$)

$\beta=(1-\alpha)$

$b=(1-\alpha)\cdot l$

$a=\alpha\cdot l=\alpha\cdot 200\cdot r$

Konaktbereich=2a=2· α ·l

Teil Kontaktbereich:

$v(x)=w(x)-4r$

$v_{mitte}=v(0)=0$

$N=?_N$ (mit $N\geq 0$)

$M_{mitte}=-N\cdot r$

$\varkappa=M_{mitte}/EI$

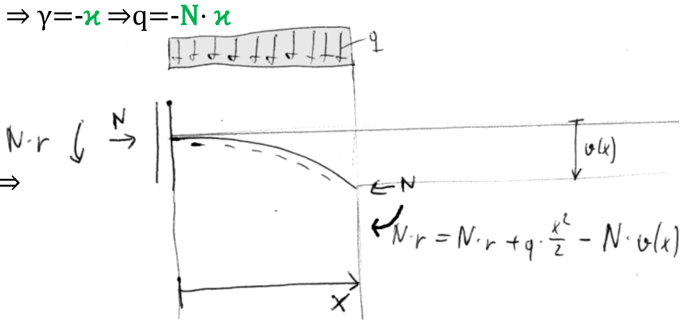
$\varphi(x)=\int-\varkappa\cdot dx=-\varkappa\cdot\int dx=-\varkappa\cdot x+\varphi_{mitte}=-\varkappa\cdot x$

$w(x)=\int\tan(\varphi(x))\cdot dx\approx\int\varphi(x)\cdot dx=-\varkappa\cdot\int x\cdot dx+w_{mitte}=-\varkappa\cdot\frac{x^2}{2}-4r$

$v(x)=\int\varphi(x)\cdot dx=-\varkappa\cdot\int x\cdot dx+v_{mitte}=-\varkappa\cdot\frac{x^2}{2}$

$q=N\cdot\gamma$ *(Bei konstanter Krümmung: Je stärker das Seil gezogen wird, desto höher ist die Gleichlast die auf das Rohr wirkt.)*

$N\cdot r=N\cdot r+q(N)\cdot\frac{x^2}{2}-N\cdot v(x)\Rightarrow N\cdot\gamma\cdot\frac{x^2}{2}=-N\cdot\varkappa\cdot\frac{x^2}{2}\Rightarrow\gamma=-\varkappa\Rightarrow q=-N\cdot\varkappa$



$H=q\cdot a$

$\varphi_s=?_\varphi$

$H=N\cdot\tan(\varphi_s)$

$N\cdot\tan(\varphi_s)=q\cdot\alpha\cdot l\Rightarrow N\cdot\tan(\varphi_s)=-N\cdot\varkappa(N)\cdot\alpha\cdot l\Rightarrow$

$\Rightarrow\tan(\varphi_s)=(-1)^2\cdot\frac{N\cdot r}{EI}\cdot\alpha\cdot l$

$v_{teilung}=v(a)=-\varkappa\cdot\frac{a^2}{2}$

$w_{teilung}=w(a)=-\varkappa\cdot\frac{a^2}{2}-4r$

$w_{teilung}-r=b\cdot\tan(\varphi_s)\Rightarrow\tan(\varphi_s)=\frac{w_{teilung}-r}{b}$

$(-1)^2\cdot\frac{N\cdot r}{EI}\cdot\alpha\cdot l=(w_{teilung}-r)/b\Rightarrow\frac{N\cdot r}{EI}\cdot\alpha\cdot l=\frac{3r-v_{teilung}}{\beta\cdot l}\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{4N}{65\cdot E\cdot\pi\cdot r^3}\cdot\alpha\cdot l\cdot(1-\alpha)\cdot l=3r-\frac{N\cdot r\cdot\alpha^2\cdot l^2}{2EI}\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{4N\cdot\alpha\cdot(1-\alpha)\cdot(200r)^2}{65\cdot E\cdot\pi\cdot r^3}=3r-\frac{N\cdot r\cdot\alpha^2\cdot(200r)^2}{2EI}\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{32000}{13\cdot\pi}\cdot\frac{N\cdot\alpha\cdot(1-\alpha)}{E\cdot r}=3r-\frac{16000}{13\cdot\pi}\cdot\frac{N\cdot\alpha^2}{E\cdot r}\Rightarrow$

$\Rightarrow 3r=\frac{N\cdot\alpha}{E\cdot r\cdot 13\cdot\pi}\cdot(32000\cdot(1-\alpha)+16000\cdot\alpha)=\frac{N\cdot\alpha}{E\cdot r\cdot 13\cdot\pi}\cdot(2-\alpha)\cdot 16000\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{N}=\frac{39*\pi*r^2*E}{16000*\alpha*(2-\alpha)}$

$M_{mitte}=-N\cdot r=\frac{39*\pi*r^3*E}{16000*\alpha*(\alpha-2)}$

$\varphi_S=\varphi(a)=\int-\varkappa\cdot dx=-\varkappa\cdot a=\frac{(-1)^2\cdot 39\cdot\pi\cdot r^3\cdot E\cdot\alpha\cdot 200\cdot r}{\alpha\cdot 16000\cdot(2-\alpha)\cdot EI}=\frac{3}{100\cdot(2-\alpha)}$

$q=-N\cdot\varkappa=\left[\frac{39\cdot\pi\cdot r^2\cdot E}{\alpha\cdot 16000\cdot(2-\alpha)}\right]^2\cdot\frac{r}{EI}$

$H=N\cdot\tan(\varphi_s)=\frac{39\cdot\pi\cdot r^2\cdot E}{\alpha\cdot 16000\cdot(2-\alpha)}\cdot\frac{3}{100\cdot(2-\alpha)}=$

$H=\frac{117*E*\pi*r^2}{1600000*\alpha*(\alpha-2)^2}$

$K=-N/EI$

$f=\sqrt{|K|}$

b_j für x=l

$b_0=COS(f\cdot L)$

$b_1=SIN(f\cdot L)/f$

$b_2=(COS(f\cdot L)-1)/K$

$b_3=SIN(f\cdot L)/(f\cdot K)-L/K$

$b_4=(COS(f\cdot L)-1)/K^2-L^2/(2\cdot K)$

b_{jb} für x=b

$b_{2b}=(COS(f\cdot b)-1)/K$

$b_{3b}=SIN(f\cdot b)/(f\cdot K)-b/K$

$b_{4b}=(COS(f\cdot b)-1)/K^2-b^2/(2\cdot K)$

$$\underline{F_{End\text{-}Mitte}} = \begin{bmatrix} 1 & b1 & -b2/EI & -b3/EI & (b4-b4b)/EI\cdot q \\ 0 & b0 & -b1/EI & -b2/EI & (b3-b3b)/EI\cdot q \\ 0 & -b1\cdot(-N) & b0 & b1 & -(b2-b2b)\cdot q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -(L-b)\cdot q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{Z_{Mitte}} = \begin{pmatrix} -4r \\ 0 \\ M_{Mitte} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{Z_{Ende}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_r \\ 0 \\ -H \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{Z_{Ende}} = \underline{\underline{F_{End\text{-}Mitte}}} \cdot \vec{Z}_{Mitte}$ mit $0 \leq \alpha \leq 1$ folgt

$$\vec{Z}_{Ende} = \begin{pmatrix} -Cos\left(\sqrt{\frac{6}{\alpha\,(2-\alpha)}} - \sqrt{\frac{6\,\alpha}{2-\alpha}}\right) * r \\ \varphi_r = [\ldots] \\ \frac{39*E*cos\left(\sqrt{\frac{6}{\alpha\cdot(2-\alpha)}}-\sqrt{\frac{6\cdot\alpha}{2-\alpha}}\right)*\pi*r^3}{16000*\alpha*(\alpha-2)} \\ -H \\ 1 \end{pmatrix}$$

aus der 1.Zeile folgt:

$$Cos\left(\sqrt{\frac{6}{\alpha\,(2-\alpha)}} - \sqrt{\frac{6\,\alpha}{2-\alpha}}\right) = 0$$

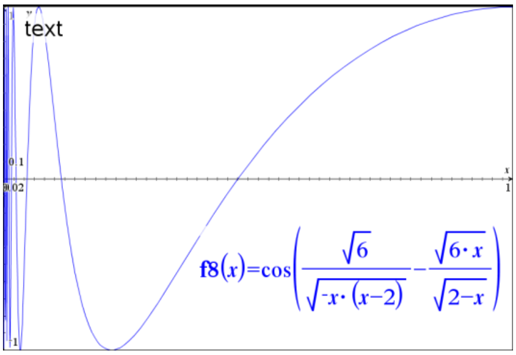
aus der 3.Zeile folgt: (mit α≤1<∞)

$$cos\left(\sqrt{\frac{6}{\alpha\cdot(2-\alpha)}} - \sqrt{\frac{6\cdot\alpha}{2-\alpha}}\right) = 0$$

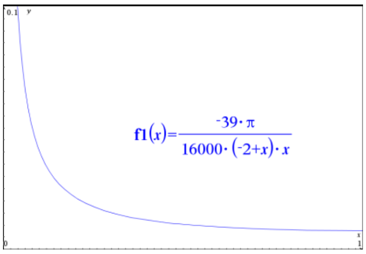
somit folgt:

$$\sqrt{\frac{6}{\alpha\cdot(2-\alpha)}}-\sqrt{\frac{6\cdot\alpha}{2-\alpha}}=\pm\arccos(0)=\pm Arccos(0)\pm z\cdot\pi=\frac{(\pm1\pm2z)\pi}{2}\qquad\boxed{\text{mit } z\in\mathbb{Z}}$$

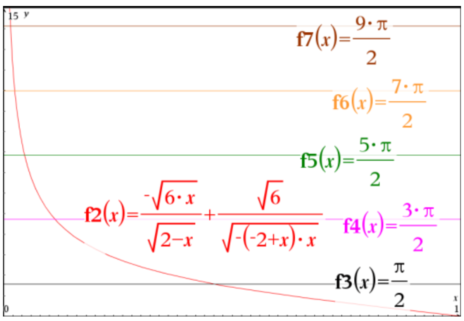
Die Lösung ist mehrdeutig:



$N(\alpha)=\frac{39*\pi*r^2*E}{16000*\alpha*(2-\alpha)}=\frac{39*\pi*r^2*E}{16000}\frac{1}{2\alpha-\alpha}$ folgt dass die N-Funktion bei α=1 ein Minimum besitzt und streng monoton fallend ist, was heißt, dass wir bei Merdeutigkeit jenen α-Wert suchen im Bereich $0\leq\alpha\leq1$, bei dem α den großtmöglichen Wert besitzt, weil es jener Wert ist, der bei Laststeigerung als erstes Auftritt.



$$\sqrt{\frac{6}{\alpha\cdot(2-\alpha)}}-\sqrt{\frac{6\cdot\alpha}{2-\alpha}}=\frac{k\cdot\pi}{2}\quad mit\ k\ beliebige\ ungerade\ natürliche\ Zahl$$



Die erste Lösung ist: k=1

$$\sqrt{\frac{6}{\alpha\cdot(2-\alpha)}}-\sqrt{\frac{6\cdot\alpha}{2-\alpha}}=\frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow\alpha=1-\frac{\pi}{\sqrt{24+\pi^2}}\approx0.46018517104379$

Länge des Kontaktbereiches zwischen Rohr und Spannglied:

$$\text{Kontaktbereich}=2\cdot\alpha\cdot l=\left(400-\frac{400*\pi}{\sqrt{\pi^2+24}}\right)\cdot r\approx 184.07406841752\cdot r$$

Spannkraft N:

$$N=\frac{39*\pi*r^2*E}{16000*\alpha*(2-\alpha)}=\frac{13\,\pi\,(24+\pi^2)\,r^2\,E}{128000}\approx 0.010806707068468\cdot r^2\cdot E$$

Spannweg:

b_{jx} für $0\leq x\leq a$

$b_{0x}=\text{COS}(f\cdot x)$

$b_{1x}=\text{SIN}(f\cdot x)/f$

$b_{2x}=(\text{COS}(f\cdot x)-1)/K$

$b_{3x}=\text{SIN}(f\cdot x)/(f\cdot K)-x/K$

$b_{4x}=(\text{COS}(f\cdot x)-1)/K^2-x^2/(2\cdot K)$

$$\underline{F}_{x\text{-Mitte}}=\begin{bmatrix} 1 & b1x & -b2x/EI & -b3x/EI & (b4x)/EI\cdot q \\ 0 & b0x & -b1x/EI & -b2x/EI & (b3x)/EI\cdot q \\ 0 & -b1x\cdot(-N) & b0x & b1x & -(b2x)\cdot q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -(x)\cdot q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b_{jy} für $a\leq x<l \Rightarrow y=x-a \Rightarrow 0\leq y<b$

$b_{0y}=\text{COS}(f\cdot y)$

$b_{1y}=\text{SIN}(f\cdot y)/f$

$b_{2y}=(\text{COS}(f\cdot y)-1)/K$

$b_{3y}=\text{SIN}(f\cdot y)/(f\cdot K)-y/K$

$b_{4y}=(\text{COS}(f\cdot y)-1)/K^2-y^2/(2\cdot K)$

$$\underline{F}_{y\text{-Trenn}}=\begin{bmatrix} 1 & b1y & -b2y/EI & -b3y/EI & (b4y)/EI\cdot 0 \\ 0 & b0y & -b1y/EI & -b2y/EI & (b3y)/EI\cdot 0 \\ 0 & -b1y\cdot(-N) & b0y & b1y & -(b2y)\cdot 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -(y)\cdot 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{Z}_{xmt}=\underline{F}_{x\text{-Mitte}}\cdot\vec{Z}_{mitte}=\begin{pmatrix} \frac{x^2*(\pi^2+24)}{320000*r}-4*r \\ \frac{x*(\pi^2+24)}{160000*r} \\ \frac{-13*\pi*(\pi^2+24)*r^3*E}{128000} \\ \frac{-13*x*\pi*(\pi^2+24)^2*r*E}{20480000000} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{Z}_{Trenn}=\underline{F}_{x\text{-Mitte}}\cdot\vec{Z}_{mitte}$ mit $x=a$

$$\vec{Z}_{\text{Trenn}}=\begin{pmatrix} \frac{\pi^2-4-\pi*\sqrt{\pi^2+24}}{4}*r \\ \frac{-200*\pi*\sqrt{\pi^2+24}+200*\pi^2+4800}{160000} \\ \frac{-13*\pi*(\pi^2+24)*r^3*E}{128000} \\ \frac{-13*\pi*\sqrt{(\pi^2+24)^3}*\left(\sqrt{\pi^2+24}-\pi\right)*r^2*E}{102400000} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{Z}_{\text{yte}}=\underline{F_{\text{y-Trenn}}}\cdot\vec{Z}_{\text{Trenn}}=\begin{pmatrix} [\dots] \\ \frac{\sqrt{\pi^2+24}*sin\left(\frac{y*\sqrt{\pi^2+24}}{400\cdot r}\right)}{400}-\frac{\pi*\sqrt{\pi^2+24}+800\cdot\left(\frac{-\pi^2}{800}-\frac{3}{100}\right)}{800} \\ [\dots] \\ -H \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta\text{U}_{\text{rohr}}=\frac{N\cdot l}{E\cdot AR}+\frac{1}{2}\cdot\int_0^a\left(\frac{x*(\pi^2+24)}{160000*r}\right)^2dx+\frac{1}{2}\cdot\int_0^b\left(\frac{\sqrt{\pi^2+24}*sin\left(\frac{y*\sqrt{\pi^2+24}}{400\cdot r}\right)}{400}-\frac{\pi*\sqrt{\pi^2+24}+800\cdot\left(\frac{-\pi^2}{800}-\frac{3}{100}\right)}{800}\right)^2dy$$

$$\Delta\text{U}_{\text{seil}}=\frac{-N\cdot l}{E\cdot AS}+\frac{1}{2}\cdot\int_0^a\left(\frac{x*(\pi^2+24)}{160000*r}\right)^2dx+\frac{1}{2}\cdot\int_0^b(\varphi_S)^2\,dy$$

Δ=$\Delta\text{U}_{\text{rohr}}$-$\Delta\text{U}_{\text{seil}}$=

$$=\frac{N\cdot l}{E}\left(\frac{1}{Ar}+\frac{1}{As}\right)+\frac{1}{2}\cdot\int_0^b\left(\frac{\sqrt{\pi^2+24}*sin\left(\frac{y*\sqrt{\pi^2+24}}{400\cdot r}\right)}{400}-\frac{\pi*\sqrt{\pi^2+24}+800\cdot\left(\frac{-\pi^2}{800}-\frac{3}{100}\right)}{800}\right)^2dy-\frac{1}{2}\cdot\int_0^b\left(\frac{3}{100\left(1+\frac{\pi}{\sqrt{24+\pi^2}}\right)}\right)^2dy=$$

$$=\frac{6\cdot N\cdot l}{5\cdot\pi\cdot\text{E}\cdot r^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\cdot(\pi^2+9)\cdot\sqrt{\pi^2+24}-\pi^4-20\cdot\pi^2+96}{1600}\cdot r-\frac{1}{2}\cdot\frac{9\cdot\pi\cdot\sqrt{\pi^2+24}}{100\cdot\left(\pi\cdot\sqrt{\pi^2+24}+\pi^2+12\right)}\cdot r$$

$$=\left(\frac{9\,(\pi^2+12)}{200\,(\pi\sqrt{\pi^2+24}+\pi^2+12)}+\frac{\pi\,(\pi^2+9)\sqrt{\pi^2+24}}{3200}-\frac{\pi^4}{3200}+\frac{29\,\pi^2}{1600}+\frac{57}{100}\right)\cdot r$$

Spannweg Δ des Spannglieds relativ zur Kopflatte (Δ an beiden Stabenden gleich):

$$\Delta=\left(\frac{9\,(\pi^2+12)}{200\,(\pi\sqrt{\pi^2+24}+\pi^2+12)}+\frac{\pi\,(\pi^2+9)\sqrt{\pi^2+24}}{3200}-\frac{\pi^4}{3200}+\frac{29\,\pi^2}{1600}+\frac{57}{100}\right)\cdot r$$

$\Delta\approx0.85076800524047\cdot r$

größte Drucklängsspannung σ_R im Rohr

$$\sigma_R=-abs\left(\frac{N}{AR}\right)-abs\left(\frac{M_{Mitte}}{I_r}\cdot3\cdot r\right)=-\frac{(\pi^2+24)}{25600}\cdot E\approx-0.0013230314219175\cdot E$$

Fehlerabschätzung der Annahmen:

$$\max\left(abs\left(\varphi(x)\right)\right)=\varphi_R=\frac{\pi^2+24+(2-\pi)*\sqrt{\pi^2+24}}{800}\approx0.034032261676418$$

$\tan(\varphi_R)\approx\varphi_R\Leftrightarrow0.034\,045\approx0.034\,032\Rightarrow$<u>Relativer Fehler: $3.9\cdot10^{-4}$</u>

$$\varkappa=\frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}\approx\frac{d^2w}{dx^2}\Leftrightarrow\frac{1}{\left[1+\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}\approx1$$

$\frac{1}{[1+(\varphi_R)^2]^{3/2}}\approx1\Leftrightarrow0.998\,3\approx1\Rightarrow$<u>Relativer Fehler: 1.7‰</u>

Ergebnisse:

Länge des Kontaktbereiches zwischen Rohr und Spannglied:

Kontaktbereich$=\left(400-\frac{400*\pi}{\sqrt{\pi^2+24}}\right)\cdot r\approx 184.07406841752\cdot r$

Spannkraft N:

$N=\frac{13\,\pi\,(24+\pi^2)\,r^2\,E}{128000}\approx 0.010806707068468\cdot r^2\cdot E$

Spannweg Δ des Spannglieds relativ zur Kopflatte (Δ an beiden Stabenden gleich):

$$\Delta=\left(\frac{9\,(\pi^2\,+\,12)}{200\,(\pi\,\sqrt{\pi^2+\,24}\,+\,\pi^2\,+\,12)}+\frac{\pi\,(\pi^2\,+\,9)\,\sqrt{\pi^2\,+\,24}}{3200}-\frac{\pi^4}{3200}+\frac{29\,\pi^2}{1600}+\frac{57}{100}\right)\cdot r$$

$\Delta\approx 0.85076800524047\cdot r$

größte Drucklängsspannung σ_R im Rohr

$\sigma_R=-\frac{(\pi^2+24)}{25600}\cdot E\approx -0.0013230314219175\cdot E$